

Exercice de Révision 8 : Fonctions réelles

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction
 $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}^m$ $f(x) = x^m \ln(x)$

1. La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est composée de fonctions qui le sont. ✓
 $\forall x > 0$

Posons $u = x^m$ et $v = \ln(x)$.
 u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et
 $\forall x > 0$, $u' = mx^{m-1}$ et $v' = \frac{1}{x}$

On a donc $\forall x > 0$

$$f'(x) = u'v + uv' \\ = mx^{m-1} \ln(x) + \frac{x^m}{x} \quad \checkmark$$

$$= mx^{m-1} \ln(x) + x^{m-1} \quad \checkmark$$

$$= x^{m-1} (m \ln(x) + 1) \quad \text{oui}$$

$$= x^{m-1} (\ln(x^m) + 1) \quad \checkmark$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f'(x) = 0 \iff x^{m-1} (\ln(x^m) + 1) = 0 \quad \checkmark$$

$$\iff x^{m-1} = 0 \quad \checkmark \quad \text{ou} \quad \ln(x^m) + 1 = 0 \quad \checkmark$$

$$\iff \begin{pmatrix} x = 0 \\ \text{impossible} \\ \text{car } x \in \mathbb{R}_+^* \end{pmatrix} \quad \text{oui}$$

$$\text{ou} \quad \ln(x^m) = -1 \quad \checkmark$$

$$\iff x^m = e^{-1} \quad \checkmark$$

$$\iff x = \sqrt[m]{e^{-1}} = e^{-\frac{1}{m}} \quad \text{ok} \quad \checkmark$$

$f'(x) \leq 0$ pour $x \in]0; \sqrt[m]{e^{-1}}]$
 $f'(x) \geq 0$ pour $x \in [\sqrt[m]{e^{-1}}; +\infty[$

pas très clair pourquoi.

x	0	$\sqrt[m]{e^{-1}}$	$+\infty$
signe de $f'(x)$		-	+
variation de f			

Value?

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (car x^m et $\ln(x) \rightarrow +\infty$)

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ (car x^m et $\ln(x) \rightarrow 0$)

Faux!!

3. a) $f(\mathbb{R}_+^*)$

$f(\sqrt[m]{e^{-1}}) = \left(\sqrt[m]{e^{-1}}\right)^m \ln\left(\sqrt[m]{e^{-1}}\right)$
 $= e^{-1} \times \frac{-1}{m} = -\frac{e^{-1}}{m}$

Donc $f(\mathbb{R}_+^*) = \left[-\frac{e^{-1}}{m}; +\infty\right[$

d'après...

$f([3; +\infty[$

$f(3) = 3^m \ln 3$

Donc $f([3; +\infty[= [3^m \ln 3; +\infty[$

• $f^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$

$f(x) = 0 \iff x^m = 0$
(impossible)

ou $\ln(x) = 0 \checkmark$
 $\iff x = 1 \checkmark$

Donc $f^{-1}(\mathbb{R}_+^*) =]1; +\infty[$

lien.

• $f^{-1}([-1; +\infty[)$

D'après le tableau de variation, le minimum est $-\frac{e^{-1}}{m}$ *oui*. Si on prend $m = 1$, $(\rightarrow \approx -0,36)$.

Peut importe la valeur de m , cela tend vers 0.??
Donc -1 n'est pas possible. *lf corrigé*

surjective = au moins un antécédent.

3. b) f est surjective sur $\mathbb{R}_+^*$ *oui* mais n'est pas injective car sur l'intervalle $]0; -\frac{e^{-1}}{m}[$, on a deux antécédents par f . *exact*

3. c) Nous allons maintenant étudier l'intervalle $[1; +\infty[$.

Contrairement à $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f sur $[1; +\infty[$ est surjective et injective; donc f définit une

Bijection de $[1; +\infty[$ *strictement monotone et continue*

car: $1 > e^{-1} \rightarrow \sqrt[m]{1} > \sqrt[m]{e^{-1}}$
 $\rightarrow 1 > \sqrt[m]{e^{-1}}$

// A justifier *lf corrigé.*

3. d) $f(x)$ est continue et strictement monotone *sur...*
donc $\exists! \alpha \in [1; +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 1$. *de plus*
1 < ...
d'après ...

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ *oui*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x^m \ln(x)}{x} \checkmark = \boxed{+\infty} \text{ Pourquoi?}$$

Donc elle admet une branche parabolique de direction asymptotique $\nearrow$ en $+\infty$.
pyl ← important.