Solution de l'exercice de Révision Automne 08 - Fonctions réelles

Solution de l'exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \ln(x) . \end{array}$$

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit de fonctions dérivables sur cet ensemble. De plus, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = nx^{n-1} \ln(x) + x^n \times \frac{1}{x} = (n \ln(x) + 1)\, x^{n-1}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) = (n \ln(x) + 1)\, x^{n-1}.}$$

2. Soit $x > 0$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{lclcll} f'(x) > 0 & \Leftrightarrow & (n\ln(x)+1)\,x^{n-1} > 0 & \Leftrightarrow & n\ln(x)+1 & \text{car } x > 0 \\ & & & \Leftrightarrow & n\ln(x) > -1 & \\ & & & \Leftrightarrow & \ln(x) > -\dfrac{1}{n} & \\ & & & \Leftrightarrow & x > \mathrm{e}^{-1/n} . & \end{array}$$

Donc la fonction f est strictement décroissante sur $\left]0; \mathrm{e}^{-1/n}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\mathrm{e}^{-1/n}; +\infty\right[$. De plus, par croissance comparée, puisque $n > 0$ (sinon il aurait fallu traiter le cas $n = 0$ à part) on a

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^n \ln(x) = 0.$$

D'autre part,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Enfin, $f\left(\mathrm{e}^{-1/n}\right) = \left(\mathrm{e}^{-1/n}\right)^n \ln\left(\mathrm{e}^{-1/n}\right) = \mathrm{e}^{-1}\left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n\,\mathrm{e}}$. Ainsi, on obtient le tableau suivant :

x	0		$\mathrm{e}^{-1/n}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{n\,\mathrm{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. (a) Par la question précédente, on en déduit que

$$\boxed{f\left(\mathbb{R}_+^*\right) = \left[-\frac{1}{n\,\mathrm{e}}; +\infty\right[.}$$

On a $f(3) = 3^n \ln(3)$. De plus $-\frac{1}{n} < 0$ donc $\mathrm{e}^{-1/n} < 1 < 3$. Donc la fonction f est strictement croissante $[3;+\infty[$ et continue sur cet intervalle donc par le théorème de la bijection, on a

$$\boxed{f([3;+\infty[) = \left[f(3); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= [3^n \ln(3);+\infty[\,.}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^n \ln(x) = 0 \quad &&\Leftrightarrow \quad \ln(x) = 0 \qquad \text{car } x > 0 \\ & &&\Leftrightarrow \quad x = 1. \end{aligned}$$

Donc par la question précédente, on a

$$\boxed{f^{\leftarrow}\left(\mathbb{R}_+^*\right) =]1;+\infty[\,.}$$

Enfin puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n\,\mathrm{e} > 1$ donc $\frac{1}{n\,\mathrm{e}} < 1$ et donc $-\frac{1}{n\,\mathrm{e}} > -1$. Donc toujours par lecture du tableau de la question précédente :

$$\boxed{f^{\leftarrow}([-1;+\infty[) = \mathbb{R}_+^*.}$$

(b) Puisque $f\left(\mathbb{R}_+^*\right) = \left[-\frac{1}{n\,\mathrm{e}};+\infty\right[$, on a $\mathbb{R}_+^* \subseteq f\left(\mathbb{R}_+^*\right)$. Donc tout réel strictement positif fait partie de l'ensemble image de f et donc admet un antécédent par f. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est surjective sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

Soit $y \in \left]-\frac{1}{n\,\mathrm{e}};0\right[$. On note que $f\left(\left]0;\mathrm{e}^{-1/n}\right[\right) = \left]-\frac{1}{n\,\mathrm{e}};0\right[$ et $f\left(\left]\mathrm{e}^{-1/n};1\right[\right) = \left]-\frac{1}{n\,\mathrm{e}};0\right[$. Donc il existe $x_1 \in \left]0;\mathrm{e}^{-1/n}\right[$ et $x_2 \in \left]\mathrm{e}^{-1/n};1\right[$ tels que $f(x_1) = f(x_2) = y$. Donc y admet au moins deux antécédents. Conclusion,

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ n'est pas injective sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

(c) Puisque $-\frac{1}{n} < 0$, on a $\mathrm{e}^{-1/n} < 1$. Donc par ce qui précède, la fonction f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$. Elle est de plus continue sur cet intervalle donc par le théorème de la bijection la fonction f définit une bijection de $[1;+\infty[$ dans $f([1;+\infty[) = [f(1); \lim_{x\to+\infty} f(x)[= [0;+\infty[= \mathbb{R}_+$. Conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ définit une bijection de } [1;+\infty[\text{ dans } \mathbb{R}_+^*.}$$

(d) La fonction f est continue et strictement croissante sur $[1;+\infty[$ et

$$1 \in \mathbb{R}_+^* = \left[f(1); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[.$$

Donc par le théorème de la bijection,

$$\boxed{\text{il existe un unique } \alpha \in [1;+\infty[\text{ tel que } f(\alpha) = 1.}$$

4. On a
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^{n-1}\ln(x).$$
Or $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Si $n=1$, $x^{n-1}=1$ et donc
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$
Si $n \geqslant 2$, alors $x^{n-1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc on a aussi
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$
Conclusion, dans tous les cas,

La courbe représentative de f admet en $+\infty$ une branche parabolique de direction verticale (Oy).