Automne 09 - Equations complexes

1. (F) : $\omega^2 - (3+i)\omega + 4 = 0$

Soit Δ le discriminant associé, on a :

$(-(3+i))^2 - 4\times 4 = 9 + 6i - 1 - 16$ ✓

$= -8 + 6i$ ✓

Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\delta = x + iy$:

On a $\boxed{\delta^2 = \Delta}$ et $|\Delta| = \sqrt{36+64} = 10$ ✓

D'où :

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ \delta^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = -8 + 6i \end{cases}$ ✓

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = 6 \end{cases}$ ✓

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 9 \\ xy = 3 \end{cases}$ ✓

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}$ car $xy > 0$ ✓

Posons $\delta = 1 + 3i$ oui

Ainsi :

(F) $\Leftrightarrow \omega_1 = \dfrac{3+i-(1+3i)}{2}$ ~~ET~~ OU $\omega_2 = \dfrac{3+i+1+3i}{2}$

$\omega_1 = 1 - i$ ✓ $\omega_2 = 2 + 2i$ ✓

Conclusion :

$\boxed{\mathcal{S} = \{1-i \,;\, 2+2i\}}$ Bien !

2. $z^{14} + 4 = (3+i)z^7$ Qui est z ??

$\Leftrightarrow z^{14} - (3+i)z^7 + 4 = 0$ ✓

Posons $\omega = z^7$, on a :

(E) $\Leftrightarrow \omega^2 - (3+i)\omega + 4 = 0$

On a donc les racines associées suivantes (d'après 1.) :

$\omega_1 = 1 - i$ ET $\omega_2 = 2 + 2i$

On remarque que z est une racine 7ième de ω, OK

$\omega_1 = 1 - i = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$ oui ET $\omega_2 = 2 + 2i = 2(1+i)$ ✓ $= 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ ✓

Les racines 7ièmes de ω_1 sont:

$$\left\{ \sqrt[7]{\sqrt{2}}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{28}+\frac{2k\pi}{7}\right)} \mid k \in [\![0 ; \cancel{n}\,\cancel{1}]\!] \right\} = \left\{ \sqrt[14]{2}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{28}+\frac{2k\pi}{7}\right)} \mid k \in [\![0 ; \cancel{n}\,\cancel{1}]\!] \right\}$$

Les racines 7ièmes de ω_2 sont:

$$\left\{ \sqrt[7]{2\sqrt{2}}\, e^{i\left(\frac{\pi}{28}+\frac{2k\pi}{7}\right)} \mid k \in [\![0 ; \cancel{n}\,\cancel{1}]\!] \right\} = \left\{ \sqrt[14]{8}\, e^{i\left(\frac{\pi}{28}+\frac{2k\pi}{7}\right)} \mid k \in [\![0 ; \cancel{n}\,\cancel{1}]\!] \right\}$$

Bien

Conclusion:

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \sqrt[14]{2}\, e^{i\left(-\frac{\pi}{28}+\frac{2k\pi}{7}\right)} \mid k \in [\![0 ; \cancel{n}\,\cancel{1}]\!] \right\} \cup \left\{ \sqrt[14]{8}\, e^{i\left(\frac{\pi}{28}+\frac{2k\pi}{7}\right)} \mid k \in [\![0 ; \cancel{n}\,\cancel{1}]\!] \right\}}$$

oui