Solution de l'exercice de Révision Automne 09 - Complexes

Solution de l'exercice 1

1. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. Soit Δ le discriminant associé à $\omega^2 - (3+i)\,\omega + 4$. On a

$$\Delta = (3+i)^2 - 16 = 9 + 6i - 1 - 16 = -8 + 6i.$$

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\delta = x + iy$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\delta^2 = \Delta \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = -8 + 6i \\ x^2 + y^2 = |\delta|^2 = |\Delta| = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 & (1) \\ x^2 + y^2 = 10 & (2) \\ 2xy = 6 \end{cases} \qquad \text{par unicité de la forme algébrique} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 9 \\ xy = 3 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{OU} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases} \qquad \text{car } xy > 0.
\end{aligned}$$

Fixons $\delta = 1 + 3i$. Dès lors, on a

$$(F)\ :\ \omega^2 - (3+i)\,\omega + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{OU} \quad \begin{aligned} \omega &= \tfrac{3+i+1+3i}{2} = 2 + 2i \\ \omega &= \tfrac{3+i-1-3i}{2} = 1 - i. \end{aligned}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de l'équation (F) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_F = \{2 + 2i; 1 - i\}.}$$

On vérifie que $s = 2 + 2i + 1 - i = 3 + i$ *OK. Et* $p = (2+2i)(1-i) = 2 - 2i + 2i + 2 = 4$ *OK.*

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$(E)\ : z^{14} + 4 = (3+i)\,z^7 \quad \Leftrightarrow \quad z^{14} - (3+i)\,z^7 + 4 = 0.$$

Posons $\omega = z^7$. Alors,

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad \omega^2 - (3+i)\,\omega + 4 = 0.$$

Donc par la question précédente :

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad \omega = 2 + 2i \quad \text{OU} \quad \omega = 1 - i \quad \Leftrightarrow \quad z^7 = 2 + 2i \quad \text{OU} \quad z^7 = 1 - i.$$

Cherchons les racines 7-ième de $2 + 2i$. On note que

$$2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Donc

$$z^7 = 2+2i \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists k \in [\![0;6]\!], \qquad z = 2^{3/2\times 1/7}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{28}+\frac{2k\pi}{7}\right)}.$$

De même $1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$. D'où,

$$z^7 = 1-i \qquad \Leftrightarrow \qquad \exists k \in [\![0;6]\!], \qquad z = 2^{1/2\times 1/7}\,\mathrm{e}^{i\left(-\frac{\pi}{28}+\frac{2k\pi}{7}\right)}.$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{ 2^{3/14}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{28}+\frac{2k\pi}{7}\right)} \;\middle|\; k \in [\![0;6]\!] \right\} \bigcup \left\{ 2^{1/14}\,\mathrm{e}^{i\left(-\frac{\pi}{28}+\frac{2k\pi}{7}\right)} \;\middle|\; k \in [\![0;6]\!] \right\}.}$$