Solution de l'exercice de Révision Automne 10 - Calculs dans $\mathbb{R}$

Solution de l'exercice 1 Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$x - 5 \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \geqslant 5$$

et

$$-3x + 4 \geqslant 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 3x \leqslant 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \leqslant \frac{4}{3}.$$

On obtient alors le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		5		$+\infty$
$\lvert x-5\rvert$		5-x		5-x	0	x-5	
$\lvert -3x+4\rvert$		-3x+4	0	3x-4		3x-4	

Premier cas, si $x \leqslant \frac{4}{3}$. Alors,

$$(I) \qquad \Leftrightarrow \qquad 5 - x - 3x + 4 > 10 \qquad \Leftrightarrow \qquad -1 > 4x \qquad \Leftrightarrow \qquad x < -\frac{1}{4}.$$

Dans ce cas, puisque $-\frac{1}{4} < \frac{4}{3}$,

$$\mathscr{S}_1 = \left]-\infty; -\frac{1}{4}\right[.$$

Deuxième cas, si $x \in \left[\frac{4}{3}; 5\right]$, on a

$$(I) \qquad \Leftrightarrow \qquad 5 - x + 3x - 4 > 10 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2x > 9 \qquad \Leftrightarrow \qquad x > \frac{9}{2}.$$

Or $\frac{4}{3} < 2 < \frac{9}{2} < 5$. Donc dans ce cas,

$$\mathscr{S}_2 = \left]\frac{9}{2}; 5\right].$$

Troisième cas, $x \in [5; +\infty[$. Alors,

$$(I) \qquad \Leftrightarrow \qquad x - 5 + 3x - 4 > 10 \qquad \Leftrightarrow \qquad 4x > 19 \qquad \Leftrightarrow \qquad x > \frac{19}{4}.$$

Or $\frac{19}{4} < 5$ donc

$$\mathscr{S}_3 = [5; +\infty[.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (I) est donné par

$$\mathscr{S} = \mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2 \cup \mathscr{S}_3 = \left]-\infty; -\frac{1}{4}\right[\cup \left]\frac{9}{2}; 5\right] \cup [5; +\infty[.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S} = \left]-\infty; -\frac{1}{4}\right[\cup \left]\frac{9}{2}; +\infty\right[.}$$

On vérifie par exemple que si $x = -1$, alors $|x-5| + |-3x+4| = |-6| + |7| = 6 + 7 = 13 > 10$ OK. De même si $x = 5$, $|x-5| + |-3x+4| = 0 + |-15+4| = 11 > 10$ OK.

Solution de l'exercice 2 Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Par la méthode du pivot de Gauss, on a les équivalences

$$
\begin{aligned}
(S_1) : \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 3x - y - 2z = 0 \\ x + y - z = -2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = -2 \\ 3x - y - 2z = 0 \\ 2x + y + z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases} && L_1 \leftrightarrow L_3 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = -2 \\ -4y + z = 6 \\ -y + 3z = 7 \\ y + 2z = 3 \end{cases} && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = -2 \\ y + 2z = 3 \\ -y + 3z = 7 \\ -4y + z = 6 \end{cases} && L_2 \leftrightarrow L_4 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = -2 \\ y + 2z = 3 \\ 5z = 10 \\ 9z = 18 \end{cases} && \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 4L_2 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = -2 \\ y + 2z = 3 \\ z = 2 \\ z = 2 \end{cases} && \begin{array}{l} L_3 \leftarrow \frac{1}{5}L_3 \\ L_4 \leftarrow \frac{1}{9}L_4 \end{array} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = -2 \\ y + 2z = 3 \\ z = 2 \end{cases} && \text{car } L_3 = L_4 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - y + z = -2 + 1 + 2 = 1 \\ y = 3 - 2z = 3 - 4 = -1 \\ z = 2. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (S_1) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_1 = \{(1, -1, 2)\}.}$$

On vérifie notre résultat :

$$\begin{cases} 2x+y+z = 2-1+2 = 3 \\ 3x-y-2z = 3+1-4 = 0 \\ x+y-z = 1-1-2 = -2 \\ x+2y+z = 1-2+2 = 1 \end{cases} \qquad \textit{OK.}$$