

Exercice 11

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \quad \checkmark \quad \text{donc} \quad -3 \leq 3\cos(x) \leq 3 \quad \checkmark$$

$$\text{donc} \quad -2 \leq 3\cos(x) + 1 \leq 4 \quad \checkmark$$

De plus, on a;

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \quad \text{donc} \quad -2 \leq -2\sin(x) \leq 2 \quad \text{oui}$$

Donc par somme, il vient;

$$-4 \leq 3\cos(x) - 2\sin(x) + 1 \leq 6 \quad \text{lien}$$

$$\text{d'où :} \quad -4 \leq f(x) \leq 6 \quad \checkmark$$

f admet un minimum et un maximum sur $\mathbb{R}$, f est donc bornée oui

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. On cherche a tel que $\cos(a) = \frac{3}{\sqrt{13}}$ et $\sin(a) = \frac{2}{\sqrt{13}}$

On a $(a \neq \frac{\pi}{2} [2\pi) \text{ car } \frac{3}{\sqrt{13}} \neq 0 [2\pi)) :$

$$\frac{\sin(a)}{\cos(a)} = \frac{\frac{2}{\sqrt{13}}}{\frac{3}{\sqrt{13}}} = \frac{2\sqrt{13}}{3\sqrt{13}} = \frac{2}{3} \quad \text{bof}$$

On a donc : $\tan(a) = \frac{2}{3}$ qui est bien définie, donc existe.
 Ainsi, il existe bien $a \in \mathbb{R}$, $\cos(a) = \frac{3}{\sqrt{13}}$ et $\sin(a) = \frac{2}{\sqrt{13}}$

Non à revoir

3. f est bornée sur $\mathbb{R}$ d'après la question 1. donc admet un maximum et un minimum. **Faux en général!** cf remarque 4.2 chap 2

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. ✓ On a:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -3 \sin(x) - 2 \cos(x) \quad \checkmark$$

$$= -(3 \sin x + 2 \cos x) \quad \checkmark$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3 \sin x + 2 \cos x \leq 0 \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{13} \left(\frac{3}{\sqrt{13}} \sin x + \frac{2}{\sqrt{13}} \cos x \right) \leq 0 \quad \checkmark \quad \text{car } (\sqrt{13} > 0) \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{13} (\cos a \sin x + \sin a \cos x) \leq 0 \quad \text{oui}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{13} \sin(x+a) \leq 0 \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow \sin(x+a) \leq 0 \quad \checkmark \quad \text{car } \sqrt{13} > 0$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, -\pi + 2k\pi \leq x+a \leq 0 + 2k\pi \quad \text{oui}$$

Parle de monotonie avant

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, -\pi - a + 2k\pi \leq x \leq -a + 2k\pi \quad \checkmark$$

Le minimum de $f(x)$ est donc atteint en $-\pi - a$ et le maximum en $-a$ sur

$[-\pi; \pi]$ OK

Le minimum vaut $3 \cos(-\pi - a) - 2 \sin(-\pi - a) + 1$

$$= 3 \cos(\pi + a) + 2 \sin(\pi + a) + 1 \quad \checkmark$$

$$= -3 \cos(a) - \sin(a) + 1 = \dots \quad \text{car}$$

$$\cos \pi = -1$$

$$\sin \pi = 0$$

Le maximum vaut $3 \cos(-a) - 2 \sin(-a) + 1$

$$= 3 \cos(a) + 2 \sin(a) + 1 = \dots$$

Conclusion:

$$\min(f(x)) = -3 \cos(a) - \sin(a) + 1$$

$$\max(f(x)) = 3 \cos(a) + 2 \sin(a) + 1$$