Solution de l'exercice de Révision Automne 11 - Trigonométrie

Solution de l'exercice 1

1. **Méthode 1.** Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que $\cos(x) \leqslant 1$ et $\sin(x) \geqslant -1$ donc $3\cos(x) \leqslant x$ et $-2\sin(x) \leqslant 2$. Ainsi
$$f(x) \leqslant 3+2+1=6.$$
De même on a $\cos(x) \geqslant -1$ et $\sin(x) \leqslant 1$ donc,
$$f(x) \geqslant -3-2+1=-4.$$
Ainsi la fonction f est majorée par 6 et minorée par -4 et est donc bornée sur $\mathbb{R}$.
Méthode 2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, par l'inégalité triangulaire,
$$|f(x)| \leqslant |3\cos(x)| + |-2\sin(x)| + |1| = 3\,|\cos(x)| + 2\,|\sin(x)| + 1.$$
Or $|\cos(x)| \leqslant 1$ et $|\sin(x)| \leqslant 1$. Par conséquent,
$$|f(x)| \leqslant 3+2+1=6.$$
Donc par la proposition III.8 du chapitre 2, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est bornée}}$.

2. Posons $x = \frac{3}{\sqrt{13}}$ et $y = \frac{2}{\sqrt{13}}$. On a
$$x^2+y^2 = \frac{9}{13}+\frac{4}{13} = 1.$$
Donc par la paramétrage du cercle trigonométrique (proposition V.4 du chapitre 3), on en déduit que
$$\boxed{\text{il existe } a \in [0;2\pi[\text{ tel que } \cos(a) = \frac{3}{\sqrt{13}} \text{ et } \sin(a) = \frac{2}{\sqrt{13}}.}$$

3. Un petit coup de forme polaire de $3\cos(x)-2\sin(x)$ que vous n'avez, bien entendu pas oublié : soit $x \in \mathbb{R}$, on a les égalités suivantes :
$$\begin{aligned} f(x) = 3\cos(x) - 2\sin(x) + 1 &= \sqrt{13}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\cos(x) - \frac{2}{\sqrt{13}}\sin(x)\right)+1 \\ &= \sqrt{13}\,(\cos(a)\cos(x) - \sin(a)\sin(x)) + 1 \\ &= \sqrt{13}\cos(x+a)+1 \end{aligned}$$
Alors d'une part, on en déduit que $\sqrt{13}+1$ est un majorant de f : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x+a) \leqslant 1$ donc
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant \sqrt{13}+1,$$
qui est vous le noterez plus précis que le majorant obtenu à la question 1.
De plus ce majorant est atteint : si $x = -a \in \mathbb{R}$ alors $f(-a) = \sqrt{13}\cos(0)+1 = \sqrt{13}+1$. Donc $\sqrt{13}+1$ est LE maximum de f et est atteint en $x=-a$ (et même pour les $x \equiv -a\ [2\pi]$).

D'autre part, $1-\sqrt{13}$ est un minorant de f : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \geqslant -1$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant -\sqrt{13}+1,$$

à nouveau ce minorant étant plus grand que $-4+1=-3$ est plus précis que celui trouvé à la question 1.
De plus ce minorant est atteint : si $x=\pi-a$, alors $f(x)=f(\pi-a)=\sqrt{13}\cos(\pi-a+a)+1=-\sqrt{13}+1$. Donc $1-\sqrt{13}$ est LE minimum de f et est atteint tous les $(2k+1)\pi-a$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Conclusion,

$$\boxed{1+\sqrt{13} \text{ est le maximum de } f \text{ et } 1-\sqrt{13} \text{ est le minimum de } f \text{ sur } \mathbb{R}.}$$