Exercices de révisions Hiver

Hiver 01 - Equations différentielles

1) On a :

$$(E) : \forall x \in]-1;1[, (1-x^2)\, y'(x) - x\, y(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in]-1;1[, y'(x) - \frac{x}{1-x^2} y(x) = \frac{1}{1-x^2}$$ car...

Soit $(E_0) : \forall x \in]-1;1[, y'(x) - \frac{x}{1-x^2} y(x) = 0$ l'équation homogène associée. ✓

Posons A une primitive de $a : x \longmapsto -\frac{x}{1-x^2}$. existence ?

Alors A est donné par $A : x \longmapsto \frac{1}{2} \ln(1-x^2)$. ✓

On en déduit $\mathcal{S}_0$ l'ensemble solution de (E_0) :

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ \begin{array}{l}]-1;1[\to \mathbb{R} \\ x \longmapsto C e^{-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)} \end{array} \middle| C \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l}]-1;1[\to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{C}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \middle| C \in \mathbb{R} \right\}$$ oui

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{l}]-1;1[\to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right)$$ ✓ Oh, un espace vectoriel !

Supposons y une fonction dérivable sur $]-1;1[$. ✓

On pose

- $\forall x \in]-1;1[\quad y_0 : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ✓
- $\forall x \in]-1;1[, \lambda(x) = \frac{y(x)}{y_0(x)}$ ✓

λ est dérivable sur $]-1;1[$ en tant que quotient de deux fonctions dérivables sur cet intervalle. ✓

De plus, $\forall x \in]-1;1[\quad y(x) = \lambda(x)\, y_0(x)$. oui

Alors on a :

$$y \text{ solution de } (E) \Leftrightarrow \forall x \in]-1;1[, y'(x) - \frac{x}{1-x^2} y(x) = \frac{1}{1-x^2}$$ ✓

$$\Leftrightarrow \forall x \in]-1;1[, \lambda'(x)\, y_0(x) + \lambda(x)\, y_0'(x) - \frac{x}{1-x^2}\lambda(x) y_0(x) = \frac{1}{1-x^2}$$ ✓

$$\Leftrightarrow \forall x \in]-1;1[, \lambda'(x)\, y_0(x) = \frac{1}{1-x^2}$$ CAR...

$$\Leftrightarrow \forall x \in]-1;1[, \lambda'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$ ✓

$\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in]-1;1[,\ \lambda(x) = \arcsin(x) + K$ oui

$\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in]-1;1[,\ y(x) = \dfrac{\arcsin(x)+K}{\sqrt{1-x^2}}$ ✓

On en déduit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E) :

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l}]-1;1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\arcsin(x)+K}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \middle| K \in \mathbb{R} \right\}$$ Bien

$$= \mathrm{Vect}\left(\cancel{\begin{array}{l}]-1;1[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}} \right)$$

espace affine ≠ vectoriel

exe : $0_{\mathcal{F}(]-1;1[,\mathbb{R})} \notin \mathcal{S}$.

petit baobab de Cauchy ?

On résout alors le Pb ? de Cauchy :

y solution de (P) $\Leftrightarrow \begin{cases} \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in \dots,\ \dfrac{\arcsin(x)+K}{\sqrt{1-x^2}} = y(x) \\ y(0) = \dfrac{0+K}{1} = K = 0 \ ✓ \end{cases}$

$\Leftrightarrow \cancel{\exists K \in \mathbb{R}}\ \forall x \in \dots,\ \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} = y(x)$

Conclusion,

La solution de (P) est donnée par

$$\begin{array}{l}]-1;1[\to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}$$ oui

2. On sait que l'équation de la tangente d'une fonction f en a est donnée par :

$t : x \longmapsto f'(a)(x-a) + f(a)$ ✓

Ici on a donc en 0 :

$t_y : x \longmapsto y'(0) \times x + y(0)$ ✓

Or $\forall x \in]-1;1[,\ y'(x) = \dfrac{1}{1-x^2} + \dfrac{x\arcsin(x)}{(1-x^2)^{3/2}} \Rightarrow y'(0) = 1$ ouf! ⚠

et $y(0) = \dfrac{\arcsin(0)}{\sqrt{1}} = 0$

D'où

$t_y : x \longmapsto x$

Déterminons la position relative de $\mathcal{C}_y$ par rapport à sa tangente.

cf la méthode par un DL.