Correction de l'exercice de Révision Hiver 01 - Equations différentielles

Solution de l'exercice 1

On considère l'équation (E) : $\forall x \in]-1;1[\,,\ (1-x^2)\,y'(x) - xy(x) = 1$ et (E_0) l'équation homogène associée. Pour tout $x \in]-1;1[$, on a $1-x^2 \neq 0$. Donc

$$(E_0) \qquad \forall x \in]-1;1[\,,\ y'(x) = -\frac{x}{1-x^2}y(x) = 0$$

$$(E_0) \qquad \forall x \in]-1;1[\,,\ y'(x) = -\frac{x}{1-x^2}y(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

La fonction $a : x \mapsto -\frac{x}{1-x^2}$ est continue sur $]-1;1[$ donc admet des primitives sur cet intervalle dont l'une est donnée par $A : x \mapsto \frac{\ln\left(1-x^2\right)}{2}$. Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_0) est donné par

$$\mathscr{S}_0 = \left\{ \begin{array}{ccc}]-1;1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln\left(1-x^2\right)}{2}} = \frac{C}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc}]-1;1[& \to & \mathbb{R} \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & & \end{array} \right)$$

Procédons maintenant à la méthode de variation de la constante. On pose

- y une fonction dérivable sur $]-1;1[$,
- $y_0 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
- $\lambda = \frac{y}{y_0}$ car y_0 ne s'annule pas sur $]-1;1[$.

La fonction λ est dérivable sur $]-1;1[$ comme quotient de fonctions qui le sont et $y = \lambda\, y_0$. Dès lors,

$$\begin{array}{cll} & y \text{ solution de } (E) & \\ \Leftrightarrow & \forall x \in]-1;1[\,,\ y'(x) - \dfrac{x}{1-x^2}y(x) = \dfrac{1}{1-x^2} & \\ \Leftrightarrow & \forall x \in]-1;1[\,,\ \lambda'(x)y_0(x) + \underbrace{\lambda(x)y_0'(x) - \dfrac{x}{1-x^2}\lambda(x)y_0 y(x)}_{=0 \text{ car } y_0 \in \mathscr{S}_0} = \dfrac{1}{1-x^2} & \\ \Leftrightarrow & \forall x \in]-1;1[\,,\ \lambda'(x)y_0(x) = \dfrac{1}{1-x^2} & \\ \Leftrightarrow & \forall x \in]-1;1[\,,\ \lambda'(x) = \dfrac{1}{(1-x^2)\,y_0(x)} & \text{car } y_0(x) \neq 0 \\ \Leftrightarrow & \forall x \in]-1;1[\,,\ \lambda'(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \\ \Leftrightarrow & \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-1;1[\,,\ \lambda(x) = \arcsin(x) + C & \\ \Leftrightarrow & \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in]-1;1[\,,\ y(x) = \lambda(x)y_0(x) = \dfrac{\arcsin(x)+C}{\sqrt{1-x^2}}. & \end{array}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccc}]-1;1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\arcsin(x)+C}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \,\middle|\, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Finalement, on obtient alors,

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (\mathscr{P}) \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \left]-1;1\right[,\ y(x) = \frac{\arcsin(x)+C}{\sqrt{1-x^2}} \\ y(0) = \frac{0+C}{\sqrt{1}} = C = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x \in \left]-1;1\right[,\ y(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}$$

Conclusion, l'unique solution du problème de Cauchy est donnée par

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \left]-1;1\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}. \end{array}}$$

1. On sait que $(1+u)^{-1/2} \underset{u\to 0}{=} 1 - \frac{u}{2} + o(u)$. Posons $u = -x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right).$$

Or la fonction arcsin est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1;1[$. Donc par le théorème de primitivation des développements limités,

$$\arcsin(x) \underset{x\to 0}{=} \arcsin(0) + x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right).$$

Ainsi,

$$\arcsin(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right).$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
y(x) = \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} &\underset{x\to 0}{=} \left(x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right) + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x + \frac{2x^3}{3} + o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Donc la tangente de y en 0 a pour équation

$$x \mapsto x.$$

De plus $y(x) - x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2x^3}{3}$. Or deux équivalents ont même signe au voisinage du point considéré. Donc $y(x) - x \geqslant 0$ en 0^+ et $y(x) - x \leqslant 0$ en 0^-. Conclusion,

$$\boxed{\text{la courbe de } y \text{ est au-dessus de sa tangente } x \mapsto x \text{ en } 0^+ \text{ et en dessous en } 0^-.}$$