Exercice de Révision 02.
Polynôme/espace vectoriel

Soit $F = \{ P \in \mathbb{R}_4[X] \mid (X+3)P = XP(X+1) \}$.

1) • $F \subseteq \mathbb{R}_4[X]$ par définition. ✓

• Si $P = 0_{\mathbb{R}_4[X]}$ Alors $(X+3)P = XP(X+1) = 0_{\mathbb{R}_4[X]}$ Ainsi $0_{\mathbb{R}_4[X]} \in F$. ✓ ok

• Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P,Q) \in F^2$ Posons $R = \lambda P + \mu Q$. ✓

Puisque $P \in F$ alors $(X+3)P = XP(X+1)$ ✓

De plus $Q \in F$ ainsi $(X+3)Q = XQ(X+1)$. ✓

Donc
$$\begin{aligned}(X+3)R &= (X+3)(\lambda P + \mu Q) \quad ✓\\ &= \lambda (X+3)P + \mu (X+3)Q \quad ✓\\ &= \lambda XP(X+1) + \mu XQ(X+1) \quad \text{oui}\\ &= X(\lambda P(X+1) + \mu Q(X+1)). \quad ✓\\ &= XR(X+1). \quad ✓\end{aligned}$$

Ainsi $R = \lambda P + \mu Q \in F$ et F est stable par combinaison linéaire.

Conclusion, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$. Bien.

2) a). Soit $P \in F$.

Puisque $(X+3)P = XP(X+1)$ on évalue en 0 ✓

$$3P(0) = 0 \times P(1) \iff 3P(0) = 0 \iff P(0) = 0. \quad ✓$$

On évalue en -1 $\quad 2P(-1) = -P(0)$ ✓ $\iff 2P(-1) = 0$ (car $P(0)=0$) $\iff P(-1) = 0$ ✓.

On évalue en -2, $\quad P(-2) = -2P(-1) \iff P(-2) = -2 \times 0$ ✓ $\iff P(-2) = 0$ ✓.

Conclusion 0, -1 et -2 sont des racines de P. oui

2) b). Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$

Faux a priori

$P \in F \Leftrightarrow 0, -2, -1$ sont des racines de P.

$\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}_1[X]$, $P = (X+2)(X+1)X\,Q$. ✓ pourquoi?

$\Leftrightarrow \exists (a;b) \in \mathbb{R}^2,\ P = (X+2)(X+1)X(aX+b)$. ✓

$\Leftrightarrow \exists (a;b) \in \mathbb{R}^2,\ P = a\,X^2(X+1)(X+2) + b\,X(X+1)(X+2)$.

Non

$$\boxed{F = \mathrm{Vect}\left(X^2(X+1)(X+2),\ X(X+1)(X+2)\right).}$$

3). Posons $B_F = \left(X^2(X+1)(X+2), X(X+1)(X+2)\right)$.
La famille B_F est libre car les deux polynômes sont de degrés distincts ✓. De plus $F = \mathrm{Vect}(B_F)$ donc B_F est génératrice dans F ✓. Donc B_F est une base de F. oui

Ainsi $\boxed{\dim(F) = \mathrm{Card}(B_F) = 2}$. Cohérent

4). Posons $B_G = (X^2, X, 1)$ et $G = \mathrm{Vect}(B_G)$. ✓
La famille est libre en tant que sous-famille de la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$ oui et engendre G ✓ donc forme une base de G. ✓ Posons aussi $B = B_F \cup B_G$. oui
B est une famille de 5 polynômes à degrés distincts donc B est libre ✓. Montrons alors qu'elle est génératrice. On a les opérations suivantes : Pense à la dimension : la dimension c'est béton!

$$B = (X^4+3X^3+2X^2,\ X^3+3X^2+2X,\ X^2,\ X,\ 1) \quad \text{OK}$$

$$\underset{e}{\sim} (X^4+3X^3+2X^2,\ X^3+3X^2,\ X^2,\ X,\ 1) \qquad C_2 \leftarrow C_2 - 2C_4 \ ✓$$

$$\underset{e}{\sim} (X^4+3X^3,\ X^3,\ X^2,\ X,\ 1) \qquad C_2 \leftarrow C_2 - 3C_3,\ C_1 \leftarrow C_1 - 2C_3 \ ✓$$

$$\underset{e}{\sim} (X^4,\ X^3,\ X^2,\ X,\ 1) \qquad C_1 \leftarrow C_1 - 3C_2 \ ✓$$

On reconnaît alors la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$. ✓

Or les opérations élémentaires ne modifient ni le caractère libre ni le caractère générateur. Donc B est libre et génératrice et donc une base de $\mathbb{R}_4[X]$. V

Ainsi par le théorème de la base adaptée ~~[illegible]~~ on en déduit que

$\boxed{G = \mathrm{Vect}(X^2, X, 1) \text{ est un supplémentaire de } F \text{ dans } \mathbb{R}_4[X].}$

Cohérent, bien.