Correction de l'exercice de Révision Hiver 02
Polynômes et espaces vectoriels

Solution de l'exercice 1

1. On observe que
   - $F \subseteq \mathbb{R}_4[X]$ par définition.
   - Si $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$, alors $(X+3)\,P = 0_{\mathbb{R}[X]} = X P\,(X+1)$. Donc $0_{\mathbb{R}[X]} \in F$.
   - Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in F^2$. Posons $R = \lambda\,P + \mu Q$. Montrons que $R \in F$. On a les égalités entre polynômes suivantes :
   $$\begin{aligned}(X+3)\,R &= (X+3)\,(\lambda\,P + \mu Q)\\ &= \lambda\,(X+3)\,P + \mu\,(X+3)\,Q\\ &= \lambda\,XP\,(X+1) + \mu XQ\,(X+1) && \text{car } P \in F \text{ et } Q \in F\\ &= X\,(\lambda\,P + \mu Q) \circ (X+1)\\ &= XR\,(X+1)\,.\end{aligned}$$
   Donc $R \in F$ et F est stable par combinaisons linéaires.

   Conclusion,
   $$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_4[X].}$$
2. Soit $P \in F$, alors $(X+3)\,P = XP\,(X+1)$.
   (a) Evaluons en 0. On a
   $$3P(0) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad P(0) = 0.$$
   Donc 0 est une racine de P. De plus, en évaluant en -3,
   $$0 = -3P(-2) \qquad \Leftrightarrow \qquad P(-2) = 0.$$
   Donc -2 est une racine de P. Enfin, on évalue en -1 (cela marche aussi pour -2) :
   $$2P(-1) = -P(0) = 0 \text{ car } 0 \text{ racine de } P \qquad \Leftrightarrow \qquad P(-1) = 0.$$
   Conclusion,
   $$\boxed{0,\ -1 \text{ et } -2 \text{ sont des racines de } P.}$$
   (b) Soit $P \in F$. Par la question précédente, puisque 0, -1, -2 sont trois racines distinctes de P, alors $X\,(X+1)\,(X+2)$ divise P : il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que
   $$P = X\,(X+1)\,(X+2)\,Q.$$
   Or $P \in F \subseteq \mathbb{R}_4[X]$. Donc $\deg(Q) \leqslant 1$. Ainsi, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $Q = aX + b$ i.e.
   $$\begin{aligned}P &= X\,(X+1)\,(X+2)\,(aX+b)\\ &= bX\,(X+1)\,(X+2) + aX^2\,(X+1)\,(X+2)\,.\end{aligned}$$
   Donc $P \in \mathrm{Vect}\,(X\,(X+1)\,(X+2)\,, X^2\,(X+1)\,(X+2))$. Ceci étant vrai pour $P \in F$ quelconque, on en conclut que
   $$\boxed{F \subseteq \mathrm{Vect}\Big(X\,(X+1)\,(X+2)\,, X^2\,(X+1)\,(X+2)\Big)\,.}$$

3. Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$. Par ce qui précède, on sait qu'il existe deux réels $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $P = X(X+1)(X+2)(aX+b)$. Réciproquement, soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et posons
$$P = X(X+1)(X+2)(aX+b).$$
On a alors,
$$\begin{array}{rcll} P \in F & \Leftrightarrow & (X+3)X(X+1)(X+2)(aX+b) = X(X+1)(X+2)(X+3)(aX+a+b) & \\ & \Leftrightarrow & aX+b = aX+a+b & \\ & \Leftrightarrow & \begin{cases} a = a \\ b = a+b \end{cases} & \text{par unicité des coefficients d'un polynôme} \\ & \Leftrightarrow & a = 0 & \\ & \Leftrightarrow & P = bX(X+1)(X+2). & \end{array}$$
Ainsi,
$$F = \text{Vect}(X(X+1)(X+2)).$$
Posons $\mathscr{B}_F = (X(X+1)(X+2))$. Cette famille engendre F et est libre car le polynôme est non nul. Conclusion,
$$\boxed{\mathscr{B}_F = (X(X+1)(X+2)) \text{ est une base de } F \text{ et } \dim(F) = \text{Card}(\mathscr{B}_F) = 1.}$$

4. Posons $\mathscr{B}_G = (1, X, X^2, X^4)$ et $G = \text{Vect}(\mathscr{B}_G)$. La famille $\mathscr{B}_G$ est une famille de polynômes de degrés distincts. Donc $\mathscr{B}_G$ est libre de plus $\mathscr{B}_G$ engendre G donc $\mathscr{B}_G$ est une base de G. Posons $\mathscr{B} = \mathscr{B}_F \cup \mathscr{B}_G$. Alors,
$$\mathscr{B} = \left(X(X+1)(X+2), 1, X, X^2, X^4\right).$$
Puisque $\deg(X(X+1)(X+2)) = 3$, $\mathscr{B}$ est aussi une famille de polynômes de degrés distincts. Donc $\mathscr{B}$ est libre. De plus, $\text{Card}(\mathscr{B}) = 5 = \dim(\mathbb{R}_4[X])$. Donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$. *La dimension c'est béton.*
Ainsi,
   - $\mathscr{B}_F$ est une base de F,
   - $\mathscr{B}_G$ est une base de G,
   - $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$.

   Cocnlusion, par le théorème de la base adaptée :
$$\boxed{G = \text{Vect}\left(1, X, X^2, X^4\right) \text{ est un supplémentaire à } F \text{ dans } \mathbb{R}_4[X].}$$

Il est possible de montrer que $\tilde{F} = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid (X+3)P = XP(X+1)\}$ *est toujours égal à* F *même si on ne suppose pas le degré plus petit que 4 : autrement dit l'équation* $(X+3)P = XP(X+1)$ *n'admet pas d'autres solutions dans* $\mathbb{R}[X]$ *que les* $\lambda X(X+1)(X+2)$.