4/2 $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$

- On sait que $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 ✓ $\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0\right)$

Par les Séries de Riemann :

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{\textcircled{2}}}$ converge car $2 > 1$ ✓

[donc elle ne diverge pas grossièrement mais elle converge ✓]

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $u_n = \sqrt{\underbrace{\operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right)}_{\sim 1} - 1 - \frac{1}{2}\operatorname{sin}\left(\frac{1}{n^2}\right)}$

En utilisant les DL'

- $\operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right)$

on a que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ ✓ donc $\operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ OK

- $\operatorname{sin}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

on a que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ ✓ donc $\operatorname{sin}\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{6n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$ ✓

Donc, on a :

Pourquoi le carré ?

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{12n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)} = \sqrt{o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$\underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{\frac{1}{12n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)}$$

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\simeq}{}^{?!} \frac{\sqrt{3}}{6n^3}$$

il fallait peut être aller plus loin dans le DL pour faire apparaître du $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha = \frac{1}{2}$

D'une autre manière :

- $\operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ ✓ - $\operatorname{sin}\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ ✓

donc $u_n \underset{n\to+\infty}{=} -\sqrt{\frac{1}{2n^2}}$ SOMME D'EQUIVALENTS !!!

$$= -\sqrt{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{n^2}$$

fixé

Scanné avec CamScanner

On admet que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} -\frac{1}{2m^2}$ ont la même nature car $-\frac{1}{2}$ est fixé.

(cela est contradictoire avec la proposition II.4 car les termes ne sont pas strictement positifs.)

Donc $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ converge.

La proposition peut aussi s'utiliser avec des termes toujours négatifs, on en reparlera à la rentrée, l'important c'est de signe constant.

Scanné avec CamScanner