Correction de l'exercice de Révision Hiver 03 Séries numériques

Solution de l'exercice 1

1. Puisque $\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} \text{ ne diverge pas grossièrement.}}$$

2. $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc (par la propriété II.5), on en déduit directement que

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} \text{ converge.}}$$

3. On sait que $\operatorname{ch}(u) \underset{u\to0}{=} 1 + \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + o\left(u^4\right)$. Posons $u = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors,

$$\operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{24n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

De plus, $\sin(u) \underset{u\to0}{=} u - \frac{u^3}{6} + o\left(u^3\right)$. Donc, en posant $u = \frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

$$\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{6n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Par suite,

$$\operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right) - 1 - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{24n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) - 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Comme par hasard les deux premiers termes disparaissent, à croire que cela a été fait exprès... On obtient alors,

$$\operatorname{ch}\left(\frac{1}{n}\right) - 1 - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{24n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{24n^4}.$$

Or les équivalents passent à la valeur absolue et à la racine carrée. Conclusion,

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{6}n^2}.}$$

4. Par la question précédente, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{6}n^2}$. De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2\sqrt{6}n^2} > 0$. Or deux séries de signe constant équivalentes ont la même nature (proposition III.4). Donc $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2\sqrt{6}n^2}$ ont la même nature. Or par la question 1, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2\sqrt{6}n^2}$ converge. Conclusion,

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \text{ converge.}}$$

Mais je n'ai aucune idée de sa limite/somme totale...