Correction de l'exercice de Révision Hiver 04 Espaces vectoriels

Solution de l'exercice 1

1. On observe les points suivants :
   - $F \subseteq \mathbb{R}_4[X]$ par définition.
   - Si $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Alors $P' = P'' = 0_{\mathbb{R}[X]}$ et donc nécessairement $P'(1) = P''(1) = 0_{\mathbb{R}}$. Ainsi, $0_{\mathbb{R}[X]} \in F$.
   - Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(P, Q) \in F^2$. Posons $R = \lambda P + \mu Q$. Montrons que $R \in F$. On a
   $$\begin{aligned} R'(1) = (\lambda P + \mu Q)'(1) &= \lambda P'(1) + \mu Q'(1) && \text{par linéarité de la dérivation} \\ &= \lambda \times 0 + \mu \times 0 && \text{car } P \in F \text{ et } Q \in F \\ &= 0. \end{aligned}$$
   De même $R''(1) = \lambda P''(1) + \mu Q''(1) = 0$. Donc $R \in F$ et F est stable par combinaisons linéaires.

   Conclusion,
   $$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}_4[X].}$$
2. Soit $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + a_4 X^4$. On a alors
   $$P' = a_1 + 2a_2 X + 3a_3 X^2 + 4a_4 X^3 \qquad \text{et} \qquad P'' = 2a_2 + 6a_3 X + 12a_4 X^2.$$
   On obtient donc les équivalences suivantes :
   $$\begin{aligned} P \in F \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = 0 \\ 2a_2 + 6a_3 + 12a_4 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 = -2a_2 - 3a_3 - 4a_4 = 6a_3 + 12a_4 - 3a_3 - 4a_4 = 3a_3 + 8a_4 \\ a_2 = -3a_3 - 6a_4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad P = a_0 + (3a_3 + 8a_4) X + (-3a_3 - 6a_4) X^2 + a_3 X^3 + a_4 X^4 \\ &\Leftrightarrow \quad P = a_0 + a_3 \left(3X - 3X^2 + X^3\right) + a_4 \left(8X - 6X^2 + X^4\right). \end{aligned}$$
   Ainsi,
   $$F = \mathrm{Vect}\left(1, 3X - 3X^2 + X^3, 8X - 6X^2 + X^4\right).$$
   Posons $\mathscr{B}_F = (1, 3X - 3X^2 + X^3, 8X - 6X^2 + X^4)$. Par ce qui précède, $\mathscr{B}_F$ engendre F. De plus, $\mathscr{B}_F$ est une famille de polynômes de degrés distincts. Donc $\mathscr{B}_F$ est libre. Donc $\mathscr{B}_F$ est une base de F. Conclusion,
   $$\boxed{\dim(F) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_F) = 3.}$$
3. Posons $\mathscr{B}'_F = \left(1, (X-1)^3, (X-1)^4\right) = (P_0, P_3, P_4)$. $\mathscr{B}'_F$ est une famille de polynômes de degrés distincts donc $\mathscr{B}'_F$ est libre. De plus, on observe que $P'_0 = P''_0 = 0_{\mathbb{R}[X]}$ donc $P'_0(1) = P''_0(1) = 0$. Donc $P_0 \in F$. Puis, 1 étant une racine de multiplicité 3 pour P_3, on en déduit que $P_1(1) = P'_1(1) = P''_1(1) = 0$. Donc $P_1 \in F$. De même 1 est une racine de multiplicité 4 pour P_4 donc $P_4 \in F$. Ainsi, $\mathscr{B}'_F$ est une famille de F, libre. De plus $\mathrm{Card}(\mathscr{B}'_F) = 3 = \dim(F)$. Conclusion,
   $$\boxed{\mathscr{B}'_F \text{ est une base de } F.}$$