Correction de l'exercice de Révision Hiver 05 - Intégration

Mais cela ne ressemble pas un peu à un DS ?

Solution de l'exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $x = -\ln(t)$ i.e. $t = \mathrm{e}^{-x}$. Alors, $\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. Ainsi,
$$I_n = \int_{\mathrm{e}^{-1}}^{1} (-1)^n \ln^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^0 (-1)^n (-x)^n \left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x = -\int_1^0 x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On observe que pour tout $x \in [0;1]$, $0 \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1$. Donc
$$0 \leqslant x^n\,\mathrm{e}^{-x} \leqslant x^n \qquad \text{car } x^n \geqslant 0$$
Donc par croissance de l'intégrale, car les bornes sont dans le bon sens :
$$0 \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{n+1}.$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}.}$$

3. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$. Donc par le théorème d'encadrement,
$$\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

4. *Rien à voir avec la question précédente. Attention au piège subtil : il existe des suites positives tendant vers 0 qui ne sont pas décroissante : exemple $u_n = \frac{1}{n}$ si n est pair et $u_n = \frac{1}{n^2}$ si n est impair.*
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0;1]$, on a $0 \leqslant x \leqslant 1$ et donc, comme $x^n \geqslant 0$,
$$0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n \qquad \Rightarrow \qquad 0 \leqslant x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-x} \leqslant x^n\,\mathrm{e}^{-x} \qquad \text{car } \mathrm{e}^{-x} > 0.$$
Donc par croissance de l'intégrale, car les bornes sont dans le bon sens,
$$0 \leqslant \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \qquad \Rightarrow \qquad 0 \leqslant I_n \leqslant I_{n+1}.$$
Ceci étant vrai pour n quelconque, on en déduit que
$$\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons
$$\forall x \in [0;1], \begin{cases} u(x) = -\,\mathrm{e}^{-x} \\ v(x) = x^{n+1}. \end{cases}$$
Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0;1]$ et
$$\forall x \in [0;1], \begin{cases} u'(x) = \mathrm{e}^{-x} \\ v'(x) = (n+1)\,x^n. \end{cases}$$
Donc par intégration par parties :
$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\,\mathrm{e}^{-x}\,x^{n+1}\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \left(-\,\mathrm{e}^{-x}\right)(n+1)\,x^n\,\mathrm{d}x \qquad = -\,\mathrm{e}^{-1} + (n+1)\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,x^n\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_{n+1} = (n+1)\,I_n - \mathrm{e}^{-1}.}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la question précédente avec $\tilde{n} = n-1$,
$$I_n = nI_{n-1} - \mathrm{e}^{-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{I_n}{n!} = \frac{I_{n-1}}{(n-1)!} - \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n!}$$
Conclusion,
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad J_n - J_{n-1} = -\frac{\mathrm{e}^{-1}}{n!}.}$$