Correction de l'exercice de Révision Hiver 06 Suites numériques

Solution de l'exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 1}{2} - u_n = \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2} = \frac{(u_n - 1)^2}{2} \geqslant 0.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} \geqslant u_n.$$

Conclusion,

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

2. Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, par le théorème de convergence monotone on sait que
   - soit la suite converge vers un réel ℓ,
   - soit la suite diverge vers $+\infty$.

Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Notons ℓ sa limite. Alors, $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ en tant que suite extraite. De plus, la fonction $x \mapsto \frac{x^2+1}{2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc en ℓ. Donc par la caractérisation séquentielle de la continuité, on a

$$f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell) = \frac{\ell^2 + 1}{2}.$$

Ainsi, par passage à la limite dans $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2}$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \ell = \frac{\ell^2+1}{2} \qquad &\Leftrightarrow \qquad 2\ell = \ell^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow \qquad \ell^2 - 2\ell + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \qquad (\ell - 1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \qquad \ell = 1. \end{aligned}$$

Or la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $u_0 = 2$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_0 = 2$. Par passage à la limite, on en déduit que $1 = \ell \geqslant 2$. Contradiction. Conclusion,

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty.}$$