

Exercice 7

1. Soit $(\alpha; \beta; \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\alpha(x^4+1) + \beta(x^3+x) + \gamma x^2 = 0 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \quad \checkmark$$

Ainsi, ~~G~~ est libre donc B_G engendre G donc $B_G \dots$

$$\boxed{\dim G = \text{card}(B_G) = 3} \quad \text{OK}$$

2. $(x-1)^4$ est un vecteur de F . $\checkmark$

$$(x-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 \quad \checkmark$$

$$= (x^4+1) - 4(x^3+x) + 6x^2$$

donc $(x-1)^4$ est une combinaison linéaire des vecteurs de G : x^4+1 ; x^3+x ;

x^2 .
donc $(x-1)^4 \in F \cap G \neq \{0_{\mathbb{R}_4[X]}\}$ OK

$G = \text{Vect}(x^4+1; x^3+x; x^2)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$.

F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ d'après la question 1 de l'exercice 04.

$F \cap G$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$. Ainsi,

$$\boxed{\dim(F \cap G) \geq 1} \quad \text{OK}$$

$F \cap G \neq \{0_{\mathbb{R}_4[X]}\}$ donc

F et G ne sont pas en somme directe Oxi

3. Soit $(\alpha; \beta; \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$1 = \alpha(x^4+1) + \beta(x^3+x) + \gamma x^2 \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 1 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{par unicité des coefficients des polynômes} \\ \text{le système est incompatible, il n'admet pas de solution.} \end{array} \quad \checkmark$$

Le polynôme 1 n'est pas une combinaison linéaire de x^4+1 ; x^3+x ; x^2 donc il n'appartient pas à G . $\checkmark$

Soit $(\alpha; \beta; \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$(x-1)^3 = \alpha(x^4+1) + \beta(x^3+x) + \gamma x^2 \quad (2)$$

$$(2) \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \\ \gamma = -3 \\ \beta = 3 \\ \alpha = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{par unicité des coefficients des polynômes.} \\ \checkmark \end{array}$$

Le système est incompatible donc le polynôme $(x-1)^3$ n'est pas une combinaison linéaire des vecteurs x^4+1 ; x^3+x ; x^2 donc il n'appartient pas à G . $\checkmark$

Ainsi,

$$\boxed{F \cap G = \text{Vect}((x-1)^4)}$$

Non. $F = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$G = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Donc

$$\boxed{\dim(F \cap G) = 1}$$

4. Par la formule de Grassmann,

$$\begin{aligned} \dim(F+G) &= \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) \\ &= 3 + 3 - 1 = 5 \quad \text{oui} \end{aligned}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin F$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin F$

et pourtant

$F \cap G = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Donc

$$\boxed{F+G = \mathbb{R}_4[X]}$$

oui
Bien

Une inégalité ici suffirait