Correction de l'exercice de Révision Hiver 07 Espaces Vectoriels

Solution de l'exercice 1

1. Posons $\mathscr{B}_G = (X^4+1, X^3+X, X^2)$. Alors $\mathscr{B}_G$ engendre G et est libre car les polynômes ont des degrés distincts. Donc $\mathscr{B}_G$ est une base de G. Conclusion,
$$\boxed{\dim(G) = \text{Card}(\mathscr{B}_G) = 3.}$$
2. Par la formule de Grassmann, on a
$$\dim(F\cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F+G) = 3+3-\dim(F+G) = 6 - \dim(F+G).$$
Or $F+G \subseteq \mathbb{R}_4[X]$. Donc $\dim(F+G) \leqslant 5$. Ainsi,
$$\boxed{\dim(F\cap G) \geqslant 6-5 = 1.}$$
3. Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$. On a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} P\in F\cap G \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} P'(1) = P''(1) = 0 \\ \exists\,(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ P = a\,(X^4+1) + b\,(X^3+X) + cX^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} P'(1) = P''(1) = 0 \\ \exists\,(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ P = a\,(X^4+1) + b\,(X^3+X) + cX^2 \end{cases} .\end{aligned}$$
Or si $P = P = a\,(X^4+1) + b\,(X^3+X) + cX^2$ alors $P' = 4aX^3 + b\,(3X^2+1) + 2cX$ et $P'' = 12aX^2 + 6bX + 2c$. D'où,
$$\begin{aligned} P\in F\cap G \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\,(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \begin{cases} P = a\,(X^4+1) + b\,(X^3+X) + cX^2 \\ 4a+4b+2c = 0 \\ 12a+6b+2c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\,(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \begin{cases} P = a\,(X^4+1) + b\,(X^3+X) + cX^2 \\ 4a+4b+2c = 0 \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \\ -6b-4c = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\,(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ \begin{cases} P = a\,(X^4+1) + b\,(X^3+X) + cX^2 \\ 4a+4b+2c = -\frac{4b+2c}{4} = -b - \frac{c}{2} = \frac{2c}{3} - \frac{c}{2} = \frac{c}{6} \\ b = \frac{4c}{-6} = -\frac{2c}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists c\in\mathbb{R},\ P = \frac{c}{6}\left(X^4+1\right) - \frac{2c}{3}\left(X^3+X\right) + cX^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \exists c\in\mathbb{R},\ P = \frac{c}{6}\left(X^4+1-4X^3-4X+6X^2\right). \end{aligned}$$
Conclusion,
$$F\cap G = \text{Vect}\left(X^4 + -4X^3 + 6X^2 - 4X + 1\right).$$
On note que $(X^4 + -4X^3 + 6X^2 - 4X + 1)$ est une famille engendrant $F\cap G$ ne contenant qu'un seul vecteur non nul et est donc une base de $F\cap G$. Ainsi,
$$\boxed{\dim(F\cap G) = 1.}$$

4. Puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_4[X]$, donc $F+G \subseteq \mathbb{R}_4[X]$. De plus, par la formule de Grassmann,

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 3 + 3 - 1 = 5 = \dim(\mathbb{R}_4[X]).$$

Conclusion,

$$\boxed{F+G = \mathbb{R}_4[X].}$$