Correction de l'exercice de Révision Hiver 08
Dérivation et analyse asymptotique

Solution de l'exercice 1

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$f(x) \text{ existe} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1+x>0 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]-1;0\right[\cup \left]0;+\infty\right[.$$

Par conséquent, l'ensemble de définition de f est

$$\boxed{\mathscr{D}_f = \left]-1;0\right[\cup \left]0;+\infty\right[.}$$

2. Par quotient, on a

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} \underset{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}}{\sim} \frac{x}{x} = 1.$$

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x)$ existe et vaut 1. Conclusion,

$$\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en } 0 \text{ en posant } f(0) = 1.}$$

3. On observe que
   - la fonction f est continue sur $I = \left]-1;+\infty\right[$ d'après la question précédente.
   - La fonction f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{D}_f$ en tant que quotient de fonctions qui sont $\mathscr{C}^1$ sur leurs domaines de définition.
   - Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)\,x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2}.$$

Dès lors, on observe que

$$\begin{aligned} f'(x) &\underset{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}}{=} \frac{1 - x + o(x)}{x} - \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} \\ &\underset{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}}{=} \frac{1}{x} - 1 + o(1) - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + o(1) \\ &\underset{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}}{=} -\frac{1}{2} + o(1). \end{aligned}$$

Ainsi, $f'(x) \underset{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}}{=} -\frac{1}{2}$. Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f'(x)$ existe et

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f'(x) = -\frac{1}{2}$$

Ainsi, f est continue sur $I =]-1;+\infty[$, $\mathscr{C}^1$ sur $I \setminus \{0\}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f'(x)$ existe. Donc par le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, f est $\mathscr{C}^1$ en 0 et donc sur I et $f'(0) = -\frac{1}{2}$. Conclusion,

$$\boxed{f \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur }]-1;+\infty[.}$$

4. La fonction f est d'après la question 2 continue sur $]-1;+\infty[$ donc

$$\boxed{\text{admet des primitives sur cet intervalle, dont celle vérifiant } F(0) = 1.}$$

De plus, on sait que $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$. Donc

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{X} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o\left(x^3\right).$$

Or F est une primitive de f sur $]-1;+\infty[$ (contenant 0) donc par le théorème d'intégration des développements limités :

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + o\left(x^4\right).$$

Or $F(0) = 1$. Conclusion,

$$\boxed{F(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + o\left(x^4\right).}$$

5. Bon anniversaire Louis-Matthieu!!!