Exercice de révision 10:

Soient $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$, $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

De même, on pose : $E = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$

$$F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}.$$

1: Calculons:

$$B = (u_1, u_2, u_3)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} \right) \quad \begin{matrix} C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 + C_1 \end{matrix}$$ ✓

$$= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad C_3 \leftarrow C_3 + 3C_2$$ ✓

= Card(..)

$$= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right) = 2$$ car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
et donc ... est libre

donc $\dim(E) = 2$ ✓

2: Montrons:

- $F \subset \mathbb{R}^3$ ✓
- $0 + 0 + 0 = 0$ donc $0_{\mathbb{R}^3} \in F$ OK
- Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in F$ et $Y = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \in F$. ✓

Montrons que $M = \lambda X + \mu Y \in F$. oui

$M = \begin{pmatrix} \lambda a + \mu d \\ \lambda b + \mu e \\ \lambda c + \mu f \end{pmatrix}$.

Donc on a: $\lambda a + \mu d + \lambda b + \mu e + \lambda c + \mu f$

$= \lambda(a+b+c) + \mu(d+e+f)$

$= 0$ car $(X, Y) \in F^2$ oui

Donc $M \in F$. bien.

Donc F est stable par combinaison linéaire.

Donc F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

3: On a: $F = \{(x,y,z) \mid x+y+z=0\}$

$= \{(x,y,z) \mid y = -x-z\}$

$= \{(x, -x-z, z)\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$.

$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$ est donc une base de F. de d

?

4: Soit $X \in \mathbb{R}^3$, $X = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

$$X \in E \cap F \iff \begin{cases} a+b+c=0 \\ \exists (\lambda,\mu,\sigma) \in \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\-\lambda\\2\lambda\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mu\\\mu\\-\mu\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\sigma\\-5\sigma\\7\sigma\end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a+b+c=0 \\ \exists (\lambda,\mu,\sigma) \in \mathbb{R}^3, \begin{array}{l} a = \lambda+\mu-\sigma \\ b = -\lambda+\mu-5\sigma \\ c = 2\lambda-\mu+7\sigma \end{array} \end{cases}$$

$$\iff \exists(\lambda,\mu,\sigma)\in\mathbb{R}^3 \begin{cases} \lambda+\mu-\sigma - \lambda+\mu-5\sigma+2\lambda-\mu+7\sigma=0 \\ a=\lambda+\mu-\sigma \\ b=-\lambda+\mu-5\sigma \\ c=2\lambda-\mu+7\sigma \end{cases}$$

$$\iff \exists(\lambda,\mu,\sigma)\in\mathbb{R}^3 \begin{cases} 2\lambda+\mu+\sigma=0 \\ \lambda+\mu-\sigma=a \\ -\lambda+\mu-5\sigma=b \\ 2\lambda-\mu+7\sigma=c \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda+\mu-\sigma=a \\ 2\lambda+\mu+\sigma=0 \\ -\lambda+\mu-5\sigma=b \\ 2\lambda-\mu+7\sigma=c \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda+\mu-\sigma=a & \\ -\mu+3\sigma=-2a & L_2\leftarrow L_2-2L_1 \\ 2\mu-6\sigma=a+b & L_3\leftarrow L_3+L_1 \\ -3\mu+5\sigma=c-2a & L_4\leftarrow L_4-2L_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda+\mu-\sigma=a & \\ -\mu+3\sigma=-2a & \\ 0=-3a+b & L_3\leftarrow L_3+2L_2 \\ -4\sigma=c+4a. & L_4\leftarrow L_4-3L_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda+\mu-\sigma=a & \\ 3\sigma-\mu=-2a & \\ b=3a & \\ \sigma=-\frac{1}{4}c-a & L_4\leftarrow -\frac{1}{4}L_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda+\mu=-\frac{1}{4}c \\ -\mu=a+\frac{3}{4}c \\ b=3a \\ \sigma=-\frac{1}{4}c-a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu, \sigma) \in \mathbb{R}^3 \begin{cases} \lambda = a + \frac{1}{2}c \\ \mu = -a - \frac{3}{4}c \\ \sigma = -\frac{1}{4}c - a \\ 3a = 6. \end{cases}$$ ✓

Donc $X = \begin{pmatrix} \lambda + \mu - \sigma \\ -\lambda + \mu - 5\sigma \\ 2\lambda - \mu + 7\sigma \end{pmatrix}$ OK

$$= \begin{pmatrix} a + \frac{1}{2}c - a - \frac{3}{4}c + a + \frac{1}{4}c \\ -a - \frac{1}{2}c - a - \frac{3}{4}c - 5\left(-\frac{1}{4}c - a\right) \\ 2a + c + a + \frac{3}{4}c + 7\left(-\frac{1}{4}c - a\right) \end{pmatrix}$$ ✓

$$= \begin{pmatrix} a \\ -2a - \frac{5}{4}c + \frac{5}{4}c + 5a \\ 3a + \frac{7}{4}c - \frac{7}{4}c - 7a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 3a \\ -4a \end{pmatrix}.$$ ✓

Donc une base de $E \cap F$ est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right)$, car ce vecteur est... de dimension 1. Qui ?

De plus, E et F ne sont pas en somme directe. car...

5: On a :

$$E + F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$ OK

Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \begin{array}{l} C_1 \leftarrow C_1 - C_4 \\ C_2 \leftarrow C_2 + C_5 \end{array}$$ ✓

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \begin{array}{l} C_1 \leftarrow \frac{1}{2}C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_2 \end{array}$$

$= \mathbb{R}^3$. Pourquoi ?