Correction de l'exercice de Révision Hiver 10 Espaces vectoriels

Solution de l'exercice 1

1. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(u_1,u_2,u_3) &= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-5\\7\end{pmatrix}\right) \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-6\\9\end{pmatrix}\right) & \begin{matrix}C_2 & \leftarrow C_2 - C_1\\ C_3 & \leftarrow C_3 + C_1\end{matrix} \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right) & C_3 \leftarrow C_3 + 3C_2 \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

   Les deux vecteurs $v_1 = (1,-1,2)$ et $v_2 = (0,2,-3)$ ne sont pas colinéaires donc (v_1,v_2) est libre. Ainsi,

$$\operatorname{rg}(u_1,u_2,u_3) = \operatorname{rg}(v_1,v_2) = \operatorname{Card}(v_1,v_2) = 2.$$

   Conclusion,

$$\boxed{\operatorname{rg}(u_1,u_2,u_3) = 2 \qquad \text{et donc} \qquad \dim(E) = 2.}$$

2. On observe les points suivants :
   - $F \subseteq \mathbb{R}^3$ par définition.
   - Si $(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}$, alors $x+y+z=0$. Donc $0_{\mathbb{R}^3} \in F$.
   - Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(u = (x,y,z), v = (x',y',z')) \in (\mathbb{R}^3)^2$. Posons $w = \lambda u + \mu v$. Alors, les coordonnées de w sont données par $w = (x'',y'',z'') = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$. Ainsi,

$$x'' + y'' + z'' = \lambda x + \mu x', + \lambda y + \mu y' + \lambda z + \mu z' = \lambda(x+y+z) + \mu(x'+y'+z').$$

     Or $u \in F$ donc $x+y+z=0$ et de même $v \in F$ donc $x'+y'+z'=0$. Ainsi,

$$x'' + y'' + z'' = 0.$$

     D'où $w \in F$ et F est stable par combinaisons linéaires.

   Conclusion,

$$\boxed{F \text{ est sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3.}$$

3. On a les égalités suivantes.

$$\begin{aligned}
F &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y+z=0 \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x=-y-z \right\} \\
&= \left\{ (-y-z,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \left\{ y(1,-1,0)+z(1,0,-1) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).
\end{aligned}$$

Les vecteurs $w_1=(1,-1,0)$ et $w_2=(1,0,-1)$ ne sont pas colinéaires. Donc (w_1,w_2) est libre et engendre F. Conclusion,

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } F \text{ et } \dim(F)=2.}$$

4. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Les opérations élémentaires ne modifient pas l'espace engendré. Donc par la question 1,

$$E = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right).$$

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
u \in E \cap F \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} u \in E \\ u \in F \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\ x+y+z=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda + 2\mu \\ 2\lambda - 3\mu \end{pmatrix} \\ \lambda - \lambda + 2\mu + 2\lambda - 3\mu = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda + 2\mu \\ 2\lambda - 3\mu \end{pmatrix} \\ 2\lambda = \mu \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 3\lambda \\ -4\lambda \end{pmatrix} \\ \mu = 2\lambda \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\,\lambda \in \mathbb{R},\ u = \begin{pmatrix} \lambda \\ 3\lambda \\ -4\lambda \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Le vecteur $(1,3,-4)$ étant non nul il forme une famille libre et engendre $E \cap F$. Conclusion,

$$\boxed{E \cap F = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et} \qquad \dim(E \cap F) = \operatorname{Card}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}\right) = 1.}$$

5. A l'aide des questions précédentes et de la formule de Grassmann,

$$\dim(E+F) = \dim(E) + \dim(F) - \dim(E \cap F) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Or par définition $E + F \subseteq \mathbb{R}^3$. Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3 = \dim(E+F)$, on en déduit directement que

$$\boxed{E + F = \mathbb{R}^3.}$$