Exercice de Révision Hiver 11

On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = e^{-2n} ch(n) = e^{-2n} \frac{e^{n}+e^{-n}}{2} = \frac{e^{-n}+e^{-3n}}{2}$ ✓

Donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \frac{1}{2}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} (e^{-n} + e^{-3n}\right)$

$\alpha \in \mathbb{R}$ on $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-n}+e^{-3n}}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n\to+\infty} n^\alpha (e^{-n}+e^{-3n}) = 0$ ✓ par croissance comparée ✓

donc $e^{-n}+e^{-3n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ ✓ et $\lim_{n\to+\infty} e^{-n}+e^{-3n} = 0$ $\boxed{\text{Donc } \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge.}}$

utilité ?

Pas clair.

par clair cf anti-prop I.10 ⚠

On sait que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \frac{1}{2}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-n} + \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-3n}\right)$

donc $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k} + \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-3k}\right)$ Admettons

Soit $v_n = e^{-n}$ et $w_n = e^{-3n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, on reconnait deux suites géom de raison e^{-1} et e^{-3}. oui

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

Donc $\sum_{k=0}^{n} v_k = \frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}} + \frac{1-e^{-3n}}{1-e^{-3}}\right)$

On $\lim_{n\to+\infty} e^{-n} = \lim_{n\to+\infty} e^{-3n} = 0$ donc $\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-e^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-3}}\right)}$

Oui