Correction de l'exercice de Révision Hiver 11 Séries numériques

Solution de l'exercice 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = \mathrm{e}^{-2n} \frac{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{-n}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{-3n}}{2}$. Donc pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-k} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-3k}.$$

On reconnaît alors deux séries géométriques de raison respectivement $q_1 = \mathrm{e}^{-1}$ et $q_2 = \mathrm{e}^{-3}$. Or $q_1 \in \left]-1;1\right[$ et $q_2 \in \left]-1;1\right[$ donc $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-k}$ et $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{-3k}$ convergent. Par suite,

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \text{ converge.}}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} u_k &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-k} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-3k} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-3}} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{e}^3}{\mathrm{e}^3-1} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} + \frac{1}{2} \frac{\mathrm{e}^3}{(\mathrm{e}-1)(\mathrm{e}^2+\mathrm{e}+1)} && \textit{Tiens Bernoulli ! Tire-toi une bûche !} \\
&= \frac{\mathrm{e}^3+\mathrm{e}^2+\mathrm{e}+\mathrm{e}^3}{2(\mathrm{e}-1)(\mathrm{e}^2+\mathrm{e}+1)}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \frac{2\,\mathrm{e}^3+\mathrm{e}^2+\mathrm{e}}{2(\mathrm{e}-1)(\mathrm{e}^2+\mathrm{e}+1)}.}$$