Exercice Matrices

On a $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \frac{1}{4}(I_3 + J)$

1) $A^2 = \frac{1}{16}(I_3 + J)(I_3 + J)$ ✓

$= \frac{1}{16}(I_3 + J + J + J^2)$ ✓

$\boxed{A^2 = \frac{1}{16}J^2 + \frac{1}{8}J + \frac{1}{16}I_3}$ OK

2) $4A^2 - 5A + I_3 = \frac{1}{4}J^2 + \frac{1}{2}J + \frac{1}{4}I_3 - \frac{5}{4}I_3 - \frac{5}{4}J + I_3$

$= \frac{1}{4}J^2 - \frac{3}{4}J$ ✓

$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} - \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{4A^2 - 5A + I_3 = 0_{\cancel{R_3}}}$ $= 0_3$

3) D'après 2 on a donc :

$5A - 4A^2 = I_3$ ✓

$\Rightarrow A(5I_3 - 4A) = I_3$ ✓

$\Rightarrow A(5I_3 - I_3 - J) = I_3$

$\Rightarrow A(4I_3 - J) = I_3$

A est inversible puisqu'il existe une matrice $B = 4I_3 - J$ telle que $AB = I_3$ ✓

De plus $B = A^{-1} = 4I_3 - J$ A encadrer.

4) Soit $n \geq 2$, $\exists ! (Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $X^n = Q(4X^2 - 5X + 1) + R$ ✓

et $\deg(R) < \deg(4X^2 - 5X + 1) = 2$ oui

Donc on pose $R = aX + d$, $(a; d) \in \mathbb{R}^2$ ok

$\exists \ldots$

Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ $X^n = Q(\underbrace{4X^2 - 5X + 1}_{\Delta = 9}) + aX + d$ ✓

$x_1 = \frac{5+3}{8} = 1$ et $x_2 = \frac{5-3}{8} = \frac{1}{4}$ ✓

Donc $X^n = Q \times 4(X-1)(X - \frac{1}{4}) + aX + d$ (!)

On évalue en 1

$1 = a + d$ ✓

On évalue en $\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4^n} = \frac{a}{4} + d$ ✓

On a donc le système suivant :

$$\begin{cases} a + d = 1 \\ a + 4d = \frac{1}{4^{n-1}} \end{cases}$$ ✓

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + d = 1 \\ 3d = \frac{1}{4^{n-1}} - 1 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases}$$ ✓

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - \frac{1}{3} \frac{1 - 4^{n-1}}{4^{n-1}} = \frac{3 \times 4^{n-1} - 1 + 4^{n-1}}{3 \times 4^{n-1}} = \frac{4^n - 1}{3 \times 4^{n-1}} \\ d = \frac{1}{3} \frac{1 - 4^{n-1}}{4^{n-1}} \end{cases}$$ ✓

On a donc $R = \frac{4^n - 1}{3 \times 4^{n-1}} X + \frac{1 - 4^{n-1}}{3 \times 4^{n-1}}$ ✓ A encadrer.

5) Soit $n \in \mathbb{N}$

D'après 4 on a donc

Non ! Non !

$\exists C \in M_3(\mathbb{R})$, $A^n = C(4A^2 - 5A + I_3) + \frac{4^n - 1}{3 \times 4^{n-1}} X + \frac{1 - 4^{n-1}}{3 \times 4^{n-1}}$

Vague : $Q(A)$ plutôt.

Or d'après 2, $4A^2 - 5A + I_3 = 0_{\mathcal{M}_3}$ ✓

Donc $A^n = \frac{1}{3 \times 4^{n-1}} \left((4^n - 1) A + (1 - 4^{n-1}) I_3 \right)$ A encadrer.