Correction de l'exercice de Révision Hiver 12 Matrices

Solution de l'exercice 1

1. Puisque I_3 commute avec J, on a

$$A^2 = \frac{1}{16}(I_3 + J)^2 = \frac{1}{16}\left(I_3 + 2J + J^2\right).$$

Or, on remarque que $J^2 = 3J$. D'où,

$$A^2 = \frac{1}{16}(I_3 + 2J + 3J).$$

Conclusion,

$$\boxed{A^2 = \frac{1}{16}(I_3 + 5J).}$$

2. Par la question précédente, on a

$$4A^2 - 5A + I_3 = \frac{1}{4}(I_3 + 5J) - \frac{5}{4}(I_3 + J) + I_3 = \frac{1}{4}(I_3 + 5J - 5I_3 - 5J + 4I_3) = 0_3.$$

Ainsi,

$$\boxed{4A^2 - 5A + I_3 = 0_3.}$$

3. Par la question précédente,

$$4A^2 - 5A = -I_3 \qquad \Leftrightarrow \qquad A(5I_3 - 4A) = I_3.$$

Conclusion,

$$\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1} = 5I_3 - 4A.}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit R_n le reste dans la division euclidienne de X^n par $4X^2 - 5X + 1$. Par le théorème de la division euclidienne, on sait que

$$\deg(R_n) < \deg\left(4X^2 - 5X + 1\right) = 2.$$

Donc il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $R_n = a_n X + b_n$ et il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$X^n = \left(4X^2 - 5X + 1\right)Q + a_n X + b_n.$$

On note que 1 est une racine de $4X^2 - 5X + 1$ et on obtient la factorisation suivante :

$$4X^2 - 5X + 1 = (X - 1)(4X - 1).$$

Donc

$$X^n = (X - 1)(4X - 1)Q + a_n X + b_n.$$

En évaluant en 1, on trouve que

$$1 = 0 + a_n + b_n.$$

En évaluant en $\frac{1}{4}$, on obtient que

$$\frac{1}{4^n} = 0 + \frac{a_n}{4} + b_n.$$

Ainsi,

$$\begin{cases} a_n + b_n = 1 \\ \frac{a_n}{4} + b_n = \frac{1}{4^n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n + b_n = 1 \\ \frac{3a_n}{4} = 1 - \frac{1}{4^n} \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_n + b_n = 1 - a_n = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3\times 4^{n-1}} = -\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n-1}}\right) \\ a_n = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \end{cases}$$

Conclusion,

$$\boxed{R_n = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) X - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n-1}}\right).}$$

5. Par la question précédente, on sait que $X^n = (4X^2 - 5X + 1)\, Q + \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) X - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n-1}}\right)$. En évaluant en A, on obtient que

$$A^n = \left(4A^2 - 5A + I_3\right) Q(A) + \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) A - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n-1}}\right) I_3.$$

Or $4A^2 - 5A + I_3 = 0_3$. Conclusion,

$$\boxed{A^n = \frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) A - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n-1}}\right) I_3.}$$

Vérification : si $n = 0$, alors

$$\frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) A - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n-1}}\right) I_3 = 0_3 - \frac{1}{3}(1-4)\, I_3 = I_3 \quad \textit{OK!}$$

si $n = 1$,

$$\frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) A - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n-1}}\right) I_3 = \frac{4}{3}\frac{3}{4}A - 0_3 = A \quad \textit{OK!}$$

si $n = 2$,

$$\frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) A - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^{n-1}}\right) I_3 = \frac{4}{3}\frac{15}{16}A - \frac{1}{3}\frac{3}{4}I_3 = \frac{5}{4}A - \frac{1}{4}I_3 = A^2,$$

OK ! Car $4A^2 - 5A + I_3 = 0_3$.