

Démissions Noël

Exercice 1

Ex 1

$$f: x \mapsto \frac{\ln(x+1 - \frac{\pi}{2})}{|\cos(x)|}$$

Posons $h = x - \frac{\pi}{2} \checkmark \Rightarrow x = h + \frac{\pi}{2} \checkmark$ alors

$$\ln(1+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3) \text{ ou } \text{et}$$

$$\cos(h + \frac{\pi}{2}) = -\sin(h) \underset{h \rightarrow 0}{=} -h + \frac{h^3}{6} - o(h^3) \checkmark$$

$$f(h + \frac{\pi}{2}) = \frac{h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)}{h - \frac{h^2}{6} - o(h^3)} \quad \text{OK}$$

$$\underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{h}{|h|} \frac{1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + o(h^2)}{|1 - \frac{h^2}{6} + o(h^2)|} \quad \checkmark \text{ Passe aux équivalents. pourquoi?}$$

Ainsi,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} f(x) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} \frac{h}{|h|} \frac{1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + o(h^2)}{|1 - \frac{h^2}{6} + o(h^2)|} = +1 \quad \checkmark$$

Ex 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \checkmark \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark \quad L_2 \leftarrow -L_2$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\sim I_3 \checkmark$$

P est donc inversible et $P^{-1} = P$ *oui*

2.

$$P^{-1}AP = P A P \quad (\text{par la question précédente}) \checkmark$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{lién.}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a:

$$(P^{-1}AP)^n = \underbrace{P^{-1}AP P^{-1}AP P^{-1}AP \dots P^{-1}AP}_{n \text{ fois}}$$

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^n P \quad \text{oui}$$

Par ailleurs par la question précédente on sait que $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale donc

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^n P = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \checkmark = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \checkmark$$

On isole A^n ;

$$P^{-1} A^n P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \text{ donc}$$

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1} \text{ oui}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2^n & 0 \\ 1 & 2^n & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 + 2 \times 2^n & 2^n & 0 \\ 1 - 2 \times 2^n + 3^n & -2^n + 3^n & 3^n \end{pmatrix} \checkmark$$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 + 2^{n+1} & 2^n & 0 \\ 1 - 2^{n+1} + 3^n & -2^n + 3^n & 3^n \end{pmatrix} \checkmark \text{ Oui}$$

4. On évalue la commutativité des matrices de la décomposition de A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\text{Or } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

Ainsi, la méthode avec la formule du linéaire de Newton sur la décomposition proposée ne fonctionne pas car les matrices ne commutent pas entre elles. *oui*