Révision Noël 02 - Complexes

Exercice 1

Calculons un équivalent simple de f en 0 :

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \checkmark$$

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \checkmark$$

Alors on a :

Non

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) + x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$$

Incohérent

$$\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)$$

L'équation de sa tangente en 0 est donnée par $x \longmapsto 1 - \frac{x}{2}$ et $\mathcal{C}_f$ se trouve au dessus de sa tangente en 0. cf corrigé pour une rédaction plus détaillée.

De plus f admet une limite finie en 0 donnée par 1.

Donc f est prolongeable par continuité en 0 tant que $x > -1$.

Exercice 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega^k b| = \sum_{k=0}^{n-1} \left|\omega^k\left(\frac{a}{\omega^k} + b\right)\right| \quad \text{car } \omega^k \neq 0 \checkmark$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} |\omega^k| \left|\frac{a}{\omega^k} + b\right| \checkmark$$

$\sum a_k b_k \neq \sum a_k \sum b_k$ ⚠

$$\cancel{= 0} \quad \text{si } \omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$$

Sinon, $\omega = 1 \iff n = 1$ OK

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ \omega^k = 1$

D'où

$$\sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega^k b| = \sum_{p=1}^{n} |a + \omega^p b| \quad \text{on pose } p = k+1 \text{ OK}$$

$$= \sum_{p=1}^{n} |\omega^p a + b| \quad \text{car } \omega = 1$$