Exercice de Révision Noël 02 - Complexes 21/12/2021

Exercice 1

$$f : x \mapsto \arctan\left(\frac{\ln(1+x)}{2+x}\right)$$

Soit $\forall x \in \mathbb{R}$, bof

$u(x) = \ln(1+x)$

$v(x) = (2+x)^{-1}$

$w = uv$

$$\arctan(w) \underset{w \to 0}{=} w - \frac{w^3}{3} + o(w^3) \quad \text{oui}$$

$$u(x) \underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$v(x) \underset{x \to 0}{=} \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{x}{2}} \quad , \text{ on pose } r = \frac{x}{2}$$

$$v(r) \underset{r \to 0}{=} \frac{1}{2} \times \left(1 - r + r^2 - r^3 + o(r^3)\right) \quad \text{oui}$$

Calcule plutôt w d'abord pour en déduire ensuite w^3

$$u^3(x) \underset{x \to 0}{=} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \times \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \times \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)$$

$$\underset{x \to 0}{=} \begin{pmatrix} x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \\ - \frac{x^3}{2} + o(x^3) \end{pmatrix} \times \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)$$

$$\underset{x \to 0}{=} x^3 + o(x^3) \quad \text{bien}$$

$$v^3(r) \underset{r \to 0}{=} \frac{1}{8} \left(1 - r + r^2 - r^3 + o(r^3)\right) \times \left(1 - r + r^2 - r^3 + o(r^3)\right) \times \left(1 - r + r^2 - r^3 + o(r^3)\right)$$

$$\underset{r \to 0}{=} \frac{1}{8} \times \begin{pmatrix} 1 - r + r^2 - r^3 + o(r^3) \\ - r + r^2 - r^3 + o(r^3) \\ + r^2 \quad + o(r^3) \end{pmatrix} \times \left(1 - r + r^2 - r^3 + o(r^3)\right)$$

rapide

$$\underset{r \to 0}{=} \frac{1}{8} \times \begin{pmatrix} 1 - 2r + 3r^2 - 2r^3 + o(r^3) \\ - r + 2r^2 - 3r^3 + o(r^3) \\ + r^2 - 2r^3 + o(r^3) \\ - r^3 + o(r^3) + o(r^3) \end{pmatrix} \boxed{\underset{r \to 0}{=}} \frac{1}{8} \times \left(1 - 3r + 6r^2 - 8r^3 + o(r^3)\right)$$

$$\underset{x \to 0}{=} \frac{1}{8} \times \left(1 - \frac{3}{2}x + \frac{6}{4}x^2 - \cancel{\frac{7}{8}}x^3 + o(x^3)\right)$$

$$w(x) \underset{x\to 0}{=} u(x)v(x) \underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \times \left(\frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + o(x^3)\right)\right) \checkmark$$

$$\underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + o(x^3)$$

$$- \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + o(x^3) \quad \left[\underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{12x^3}{48} + \frac{8x^3}{48} + o(x^3)\right] \checkmark$$

Aligne tes calculs

$$+ \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$+ o(x^3)$$

$$w^3 \underset{x\to 0}{=} u^3 \times v^3 \underset{x\to 0}{=} (x^3 + o(x^3)) \times \left(\frac{1}{8} - \frac{3}{16}x + \frac{6}{32}x^2 - \frac{8}{64}x^3 + o(x^3)\right)$$

$$\underset{x\to 0}{=} \frac{x^3}{8} + o(x^3)$$ oui (ouf!)

Donc

$$\arctan(w) \underset{w\to 0}{=} \arctan\left(\frac{\ln(1+x)}{2+x}\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{20x^3}{48} + o(x^3) - \frac{x^3}{24} + o(x^3)$$

$$\boxed{\arctan\left(\frac{\ln(1+x)}{2+x}\right) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{18}{48}x^3 + o(x^3)}$$

A simplifier !

Bon travail !

Exercice 2

On pose $I =]-1;+\infty[$

$$(E)\ \forall x \in I,\quad y'(x) + \frac{2x}{1+x}\,y(x) = (1+x)^3 e^{x}$$

$$1 \neq -\frac{2x}{1+x}$$

donc $m \neq -a$

donc on cherche une solution de la forme :

A faire plutôt lorsque a est constant sinon, il est possible que cela n'aboutisse pas.

$Q(x)\,e^{mx}$ avec $Q(x)$ un polynome du 3ème degré ok

Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, et

$\forall x \in I$ $y_p(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\,e^{x}$

donc y_p dérivable sur I et $\forall x \in I$ $y_p'(x) = (a3x^2 + b2x + c)e^{x} + (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{x}$ ✓

$\forall x \in I$,

y_p solution de $(E) \Leftrightarrow$ $e^{x}(a3x^2 + b2x + c) + \frac{2x}{1+x}(ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{x} = (1+x)^3 e^{x}$

$+ (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{x}$ =

$\Leftrightarrow \forall x \in I$,

$e^{x}(a3x^2 + b2x + c) + \frac{2ax^4}{1+x} + \frac{2bx^3}{1+x} + \frac{2cx^2}{1+x} + \frac{2xd}{1+x} = (1+x)^3 e^{x}$

$+ (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{x}$

OK

$\Leftrightarrow \forall x \in I$, ? Hem $\frac{2ax^4}{1+x} \neq \frac{2ax^4}{1} + \frac{2ax^4}{x}$ n'est-ce pas ?

$(a3x^2 + b2x + c + 2ax^4 + 2ax^3 + 2bx^3 + 2bx^2 + 2cx^2 + 2cx$

$+ 2xd + 2d + ax^3 + bx^2 + cx + d)\,e^{x} = (1+x)^3 e^{x}$

OK cf corrigé.

$\Leftrightarrow \forall x \in I$,

$e^{x}(2ax^4 + x^3(3a + 2b) + x^2(3a + 3b + 2c) + x(2b + 3c + 2d) + (c + 3d))$

$= (1+x)^3 e^{x}$

Or,

$(1+x)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

1 1
1 2 1
1 3 3 1

donc, $\begin{cases} 2a = 0 \\ 3a + 2b = 1 \\ 3a + 3b + 2c = 3 \\ 2b + 3c + 2d = 3 \\ c + 3d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{2} \\ c = (3 - \frac{3}{2}) \times \frac{1}{2} \\ d = 1 - ((3 - \frac{3}{2}) \times \frac{1}{2}) \times \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{2} \\ c = 0{,}75 \\ d = 0{,}75 \end{cases}$

Donc, soit y une solution de (E) :

$$\boxed{y = \left(\frac{1}{2}x^2 + 0{,}75x + 0{,}75\right)e^x}$$