

Exercice de révision 4 Noël

Soit $f: x \mapsto 2 \arctan(\sqrt{1+x^2} - x) + \arctan(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 > 0$ ✓ et la fonction $\arctan$ est définie sur $\mathbb{R}$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

$$\text{D}_f = \mathbb{R} \quad \checkmark$$

1) Développement asymptotique de f à l'ordre $\frac{1}{x^3}$

Soit $x \in \mathbb{R}, \sqrt{1+x^2} - x = x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x$ Que si $x > 0$

$$x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x \left(1 + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} + \frac{1/2(-1/2)}{2} \frac{1}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \right) - x \quad \text{oui}$$

$$\underset{x \rightarrow +\infty}{=} x + \frac{1}{2} \frac{1}{x} - \frac{1}{8} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) - x \quad \checkmark$$

$$\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{2} \frac{1}{x} - \frac{1}{8} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad \checkmark$$

$$\text{On a: } \arctan(u) \underset{u \rightarrow 0}{=} u - \frac{u^3}{3} + o(u^3) \quad \checkmark$$

$$\text{On pose } u: x \mapsto \frac{1}{2} \frac{1}{x} - \frac{1}{8} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad \text{oui}$$

$$\text{on a bien } \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} \text{On a } u^2(x) &= \left(\frac{1}{2} \frac{1}{x} - \frac{1}{8} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \left(\frac{1}{2} \frac{1}{x} - \frac{1}{8} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^3(x) &= \left(\frac{1}{2} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \left(\frac{1}{2} \frac{1}{x} - \frac{1}{8} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \\ &= \frac{1}{8} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad \text{oui} \end{aligned}$$

$$o(u^3) = o\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} \arctan(u(x)) &= \frac{1}{2} \frac{1}{x} - \frac{1}{8} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) - \frac{1}{24} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad \checkmark \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{x} - \frac{1}{6} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad \text{Bien.} \end{aligned}$$

De plus en $+\infty$, $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \quad \checkmark$

$$\begin{aligned} \text{Et } \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \quad \checkmark \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan(x) \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 \left(\frac{1}{2} \frac{1}{x} - \frac{1}{6} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \frac{1}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \\ &= \boxed{\frac{\pi}{2} - \cancel{\frac{1}{2} \frac{1}{x}} + \cancel{\frac{1}{6} \frac{1}{x^3}} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)} \end{aligned}$$

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$, car $\forall x \in \mathbb{R}, 1+x^2 > 0$ ✓

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2 \left(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} - 1 \right) \frac{1}{1 + (\sqrt{1+x^2} - x)^2} + \frac{1}{1+x^2} \quad \text{oui}$$

$$f'(x) = 2 \left(\frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \right) \frac{1}{1 + 1 + x^2 - 2x\sqrt{1+x^2} + x^2} + \frac{1}{1+x^2} \quad \checkmark$$

$$f'(x) = \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{1+x^2 - x\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{1+x^2} \quad \checkmark$$

$$f'(x) = \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)^{3/2} - x(1+x^2)} + \frac{1}{1+x^2} \quad \text{OK}$$

$$f'(x) = \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)(\sqrt{1+x^2} - x)} + \frac{1}{1+x^2} \quad \text{oui}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} \quad \checkmark$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 0$ Bien.

Or $\mathbb{R}$ est un intervalle. ✓

$\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = C$ ✓

De plus $f(0) = 2 \arctan(1) + \arctan(0)$
 $= 2 \times \frac{\pi}{4} \quad \checkmark$

$$= \frac{\pi}{2} = C \quad \checkmark$$

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\pi}{2}$ Bien.
 Le résultat est bien cohérent avec la question puisque le développement asymptotique tronqué avait pour limite $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$

NON car l'unique DL de $\frac{\pi}{2}$ à l'ordre $\frac{1}{x^3}$ c'est $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ $x \rightarrow +\infty$