

Rev Noëlle

26.12. (2) Soit (E) $\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = x e^x \sin(x)$

Soit (E_c) l'équation caractéristique associée:

$$(E_c) x^2 - 2x + 2 = 0 \quad \checkmark$$

Soit $\Delta = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$ le discriminant associé

Les racines sont $r_1 = 1 - i$ $r_2 = 1 + i$ *conjug.*

• L'ensemble des solutions homogènes est donné par:

$$Y_h(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x (A \cos x + B \sin x) \end{array} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

lien.

• On cherche une solution particulière de (E)

On a $\sin(x) = \text{Im}(e^{ix})$ $\checkmark$

Donc $x e^x \sin(x) = \text{Im}(x e^x e^{ix})$ $\checkmark$

On pose:

$$(F) \forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = x e^x e^{ix} = x e^{(1+i)x} \quad \checkmark$$

Soit y_{pf} une solution particulière de (F), elle est

de la forme: Soit $a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y_{pf}(x) = a x^2 e^{(1+i)x}$ $\checkmark$

imp restrictif, il faut prendre $a \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{C}$

$$y_{pf}'(x) = 2ax e^{(1+i)x} + (1+i) e^{(1+i)x} a x^2$$

$$= a x e^{(1+i)x} (2 + (1+i)x)$$

$$y_{pf}''(x) = (a x e^{(1+i)x})' (2 + (1+i)x) + (1+i) a x e^{(1+i)x}$$

$$\text{Or, } (a x e^{(1+i)x})' = a [e^{(1+i)x} + (1+i)x e^{(1+i)x}]$$

$$y_{pf}''(x) = a e^{(1+i)x} [(1 + (1+i)x)(2 + (1+i)x) + (1+i)x]$$

$$= a e^{(1+i)x} [2 + (1+i)x + 2(1+i)x + 2ix^2 + (1+i)x]$$

$\checkmark$

Rev Noël

Ex. 12 ① Soit $f: x \mapsto \sqrt{x^2+4x+5}$

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x)$ existe $\Leftrightarrow x^2+4x+5 > 0$ ✓

Soit Δ le discriminant associé
 $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$ ✓ donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)$ existe ✓

Déterminer le comportement asymptotique
 de $f: x \mapsto \sqrt{x^2+4x+5}$ en $+\infty$

On a : $4x+5 = o(x^2)$ ✓
 $x \rightarrow +\infty$

$$x^2+4x+5 \sim x^2 \quad x \rightarrow +\infty \quad \checkmark$$

$$\sqrt{x^2+4x+5} \sim x \quad x \rightarrow +\infty \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} x &\rightarrow +\infty \\ \frac{1}{x} &\rightarrow 0 \\ \frac{1}{x^2} &\rightarrow 0 \\ \frac{1}{x^3} &\rightarrow 0 \\ -\frac{1}{x^3} &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

→ ordre 1

On calcule

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x &= \sqrt{x^2+4x+5} - x \\ &= \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}\right)} - x \quad \checkmark \\ &= x(1-1) \quad ? \quad \text{F.I.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On a } f(x) - x &= (x^2+4x+5)^{\frac{1}{2}} - x \\ &= \left(x^2 \left(1 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} - x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On pose } u: x &\mapsto \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} \quad \checkmark \\ &= x(1+u)^{\frac{1}{2}} - x = x((1+u)^{\frac{1}{2}} - 1) \end{aligned}$$

$$\text{Or } u \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et } u(x) = \left(\frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}\right) \left(\frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}\right) = \frac{16}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$(1+u)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{u(x)}{2} + o(u)$$

$$\begin{aligned} \frac{u(x)}{2} &= \frac{2}{x} + \frac{5}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{donc } f(x) - x = x \left(\frac{2}{x} + \frac{5}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\ &= 2 + \frac{5}{2x} + o(1) \end{aligned}$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 2$ // donc f est au-dessus de son asymptote

pas d'air il te manque un ordre

$\forall a \in \mathbb{R},$

$$y_{pf}''(x) = a e^{(1+i)x} [2 + 4(1+i)x + 2ix^2]$$

Donc y_{pf} est solution de F

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, a e^{(1+i)x} [2 + 4(1+i)x + 2ix^2] - 2ax e^{(1+i)x} [2 + (1+i)x] + 2ax^2 e^{(1+i)x} = x e^{(1+i)x}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, a (\underline{2 + 4(1+i)x + 2ix^2}) - 2ax (\underline{2 + (1+i)x}) + \underline{2ax^2} = x \quad \text{car } \forall x \in \mathbb{R} e^{(1+i)x} \neq 0 \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, [2ai - 2a(1+i) + 2a] \underline{x^2} + [4a(1+i) - 4a] x + 2a = x$$

On note qu'il suffit de vérifier:

$$\begin{cases} 2ai - 2a(1+i) + 2a = 2ai - 2a - 2ai + 2a = 0 & \text{toujours vrai} \\ 4a(1+i) - 4a = 4a + 4ai - 4a = 4ai = 1 \\ 2a = 0 \end{cases}$$

OK cf corrigé.