Correction de l'exercice de Révision Noël 05 - Equations différentielles

Solution de l'exercice 1 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,, $x^2+4x+5>0$ et donc $f(x)$ existe et on a

$$f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}=\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}=x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}} \qquad \text{car } x>0.$$

On sait que

$$\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1+\frac{u}{2}+\frac{(1/2)(-1/2)}{2}u^2+o\left(u^2\right) \underset{u\to 0}{=} 1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+o\left(u^2\right)$$

Posons $u(x)=\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}$. Alors,

- $u(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
- De plus,
$$u(x)^2=\left(\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)\left(\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{16}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$
- Enfin, $o\left(u^2(x)\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Par suite,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to+\infty}{=} x\begin{pmatrix} 1+\frac{2}{x} & +\frac{5}{2x^2} & \\ & -\frac{2}{x^2} & +o\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ & & +o\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{pmatrix} \\ &\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{=} x+2+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

On en déduit que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation

$$\boxed{y=x+2.}$$

De plus, $f(x)-x-2 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}>0$. Or deux équivalents ont même signe au voisinage considéré. Donc la courbe de f est

$$\boxed{\text{au dessus de son asymptote } \textbf{au voisinage} \text{ de } +\infty.}$$

Solution de l'exercice 2 L'équation homogène associée à (E) est

$$(E_0) \qquad \forall x\in\mathbb{R},\ y''(x)-2y'(x)+2y(x)=0.$$

Son équation caractéristique associée est

$$(E_c) \qquad r^2-2r+2=0.$$

Soit Δ le discriminant associé : $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$. Donc les racines associées sont complexes et conjuguées données par
$$r_1 = \frac{2+2i}{2} = 1+i \qquad \text{et} \qquad r_2 = 1-i.$$
Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_0) est donné par
$$\begin{aligned}\mathscr{S}_0 &= \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x\left(A\cos(x) + B\sin(x)\right) \end{array} \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x\cos(x) \end{array} ; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x\sin(x) \end{array} \right).\end{aligned}$$
Posons, l'équation différentielle
$$(F) \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ z''(x) - 2z'(x) + 2z(x) = x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{ix} = x\,\mathrm{e}^{(1+i)x}\,.$$
On note alors que le second membre est de la forme $P(x)\,\mathrm{e}^{mx}$ avec $P = x$ un polynôme de degré 1 et $m = 1+i$ une racine simple de (E_c). En conséquence, on fixe $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ et on pose
$$z_p : \qquad x \mapsto \left(ax^2 + bx + c\right)\mathrm{e}^{(1+i)x}\,.$$
La fonction z_p est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et *(hummmm miam miam, un peu de calcul...*
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \qquad z_p'(x) &= \left[2ax + b + (1+i)\left(ax^2+bx+c\right)\right]\mathrm{e}^{(1+i)x} \\ &= \left[(a+ai)\,x^2 + (2a+b+bi)\,x + (b+c+ci)\right]\mathrm{e}^{(1+i)x}\end{aligned}$$
Puis, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}z_p''(x) &= \left[2\,(a+ai)\,x + (2a+b+bi) + (1+i)\left((a+ai)\,x^2 + (2a+b+bi)\,x + (b+c+ci)\right)\right]\mathrm{e}^{(1+i)x} \\ &= \left[(a+ai+ai-a)\,x^2 + (2a+b+bi+2ai+bi-b+2a+2ai)\,x \right. \\ &\qquad \left. +b+c+ci+bi+ci-c+2a+b+bi\right]\mathrm{e}^{(1+i)x} \\ &= \left[2aix^2 + (4a+4ai+2bi)\,x + 2a+2b+2bi+2ci\right]\mathrm{e}^{(1+i)x}\,.\end{aligned}$$
Dès lors,
$$\begin{aligned} & z_p \text{ est solution de } (F) \\ \Leftrightarrow \qquad & \forall x \in \mathbb{R},\ \left[\begin{array}{lll} 2aix^2 & +(4a+4ai+2bi)\,x & +2a+2b+2bi+2ci \\ -2\,(a+ai)\,x^2 & -2\,(2a+b+bi)\,x & -2\,(b+c+ci) \\ +2ax^2 & +2bx & +2c \end{array}\right]\mathrm{e}^{(1+i)x} = x\,\mathrm{e}^{(1+i)x} \\ \Leftrightarrow \qquad & \forall x \in \mathbb{R},\ [0 + 4aix + 2a + 2bi]\,\mathrm{e}^{(1+i)x} = x\,\mathrm{e}^{(1+i)x} \\ \Leftrightarrow \qquad & \forall x \in \mathbb{R},\ 4aix + 2a + 2bi = x \qquad \text{car } \mathrm{e}^{(1+i)x} \neq 0.\end{aligned}$$
On note alors qu'il suffit de prendre $\begin{cases} 4ai = 1 \\ 2a + 2bi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{i}{4} \\ b = -\frac{2}{2i}a = ia = \frac{1}{4} \end{cases}$. Ainsi,
$$z_p : x \mapsto \frac{x - ix^2}{4}\,\mathrm{e}^{(1+i)x} \ \text{ est une solution de } \ (F)\,.$$

Alors, puisque les coefficients de (E) sont réels, et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x\,\mathrm{e}^x \sin(x) = \mathrm{Im}\left(x\,\mathrm{e}^{(1+i)x}\right)$, on obtient que $y_p = \mathrm{Im}\,(z_p)$ est une solution de (E). Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y_p(x) = \mathrm{Im}\left(\frac{x - ix^2}{4}\,\mathrm{e}^{(1+i)x}\right) = \frac{x\,\mathrm{e}^x}{4}\mathrm{Im}\left((1-ix)\,\mathrm{e}^{ix}\right) = \frac{x\,\mathrm{e}^x}{4}\left(\sin(x) - x\cos(x)\right).$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x\,\mathrm{e}^x}{4}\left(\sin(x) - x\cos(x)\right) + \mathrm{e}^x\left(A\cos(x) + B\sin(x)\right) \end{array} \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.}$$