Exercice 2 :

Soit (E) l'équation suivante

$(E) : \forall x \in \mathbb{R} \quad y'(x) + y(x) = \cos(x)$

donc l'équation homogène associée est

$(E_0) : \forall x \in \mathbb{R} \quad y'(x) + y(x) = 0$ ✓

~~La fonction x ↦~~ 1 est bien continue et admet des primitives sur $\mathbb{R}$ dont l'une est donnée par $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto x \end{array}$ ✓. Par conséquent :

$$\mathcal{S}_0 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{-x} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto Ce^{-x} \end{array} \middle| C \in \mathbb{R} \right\}$$

oui ✓

On a des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ donc (E) admet des solutions sur $\mathbb{R}$

Vague

Soient y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ ✓ et $\forall x \in \mathbb{R}$, on pose $\lambda(x) = \dfrac{y(x)}{y_0(x)}$ qui est bien

Qui est y_0 ???

définie car $\forall x \in \mathbb{R}$, $y_0(x) \neq 0$ et est même dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pas clair

y solution de (E)

$$\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(x) y_0(x) + \underbrace{\lambda(x) y_0'(x) + \lambda(x) y_0(x)}_{= 0 \text{ car } y_0 \in \mathcal{S}_0} = \cos(x)$$ ✓ ✓

$$\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \lambda'(x) y_0(x) = \cos(x)$$ ✓

$\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \lambda'(x) = \cos(x)e^{x}$ ✓ $\quad$ car $y_0(x) \neq 0$

Pas clair, tu n'as pas défini y_0.

Pour déterminer la primitive, on va faire une double IPP

Ok, cf corrigé pour une autre méthode par les complexes.

La fonction $x \longmapsto \cos(x)e^{x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc des primitives existent. ✓

On pose (F, la primitive de ceci)

conflit !

$\forall x \in \mathbb{R}$
$$F(x) = \int_0^x \cos(t)e^{t}\,dt$$

On pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} u(x) = e^{x} \\ v(x) = \sin(x) \end{cases}$ ✓

Les 2 fonctions sont C_1 sur $\mathbb{R}$, ✓ et ~~donc~~ on a :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} u'(x) = e^{x} \\ v'(x) = \cos(x) \end{cases}$

$$\int_0^x e^{t}\cos(t)\,dt = \left[e^{t}\sin(t)\right]_0^x - \int_0^x e^{t}\sin(t)\,dt$$

oui

$$= e^{x}\sin(x) - \int_0^x \underbrace{e^{t}\sin(t)\,dt}_{\text{une autre IPP}}$$

On pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \tilde{u}(x) = e^{x} \\ \tilde{v}(x) = -\cos(x) \end{cases}$ ✓

Les 2 fonctions sont C_1 ✓ sur $\mathbb{R}$, et ~~donc~~ on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \tilde{u}'(x) = e^x \\ \tilde{v}'(x) = \sin(x) \end{cases}$$

$$\int_0^x e^t \sin(t)\,dt = \Big[-e^t \cos(t)\Big]_0^x + \int_0^x e^t \cos(t)\,dt$$

$$= -e^x \cos(x) + 1 + \int_0^x e^t \cos(t)\,dt$$

On réunit ensemble les 2 ipp car on a la m̄ intégrale. Donc on a : $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\int_0^x e^t \cos(t)\,dt = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) - 1 - \int_0^x e^t \cos(t)\,dt$$

$$\iff 2\int_0^x e^t \cos(t)\,dt = e^x \sin(x) + e^x \cos(x) - 1$$

$$\iff \int_0^x e^t \cos(t)\,dt = \frac{e^x \sin(x) + e^x \cos(x) - 1}{2}$$

On a ainsi :

y solution de $(E) \iff \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \lambda(x) = \frac{1}{2}\left(e^x \sin(x) + e^x \cos(x) - 1\right) + c$

$$\exists c \in \mathbb{R} \iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \lambda(x)\, y_0(x) = \frac{e^x \sin(x) + e^x \cos(x) - 1 + c}{2e^x}$$

Conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est donné par :

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{e^x \sin(x) + e^x \cos(x) - 1 + C}{2e^x} \end{array} \right| c \ldots$$

A simplifier

Exercice 1 : $DL_5(0)$ de $x \longmapsto \frac{1}{2+\sin(2x)}$

On sait que $\sin(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$

$$\sin(u) \underset{x \to 0}{=} u - \frac{u^3}{6} + \frac{u^5}{120} + o(u^5)$$ ✓

$2x \longrightarrow 0$

on pose $u = 2x$ ✓ ; donc on a :

$$\sin(2x) \underset{x \to 0}{=} 2x - \frac{8x^3}{6} + \frac{32x^5}{120} + o(x^5)$$ ✓

On a alors $\frac{1}{2+2x-\frac{8x^3}{6}+\frac{32x^5}{120}+o(x^5)}$ ✓

On va factoriser par le terme de plus haut (prépondérant) pour faire apparaitre $\frac{1}{1+v}$ oui !

$$= \frac{1}{2\left(1+x-\frac{8x^3}{12}+\frac{32x^5}{240}+o(x^5)\right)}$$ ✓

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1+v)}$$ ✓

Or $\frac{1}{1+v} \underset{\cancel{x}\, v \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k v^k + o(v^n)$

$$= 1 - v + v^2 - v^3 + v^4 - v^5 + o(v$$ ✓

On pose $v(x) \underset{x \to 0}{=} \boxed{x - \frac{8x^3}{12} + \frac{32x^5}{240} + o(x^5)}$

- $v(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ oui

- $v^2(x) \underset{x \to 0}{=} \left(x - \frac{8x^3}{12} + \frac{32x^5}{240} + o(x^5)\right)\left(x - \frac{8x^3}{12} + \frac{32x^5}{240} + o(x^5)\right)$

$$\underset{x \to 0}{=} x^2 - \frac{8x^4}{12} + o(x^5)$$
$$- \frac{8x^4}{12} + o(x^5)$$
$$o(x^5)$$
$$\dots$$

$$= \boxed{x^2 - \frac{16x^4}{12} + o(x^5)}$$

$\underbrace{12}$ ⇐ Simplifie !!

- $v^3(x) \underset{x \to 0}{=} \left(x^2 - \frac{16x^4}{12} + o(x^5)\right)\left(x - \frac{8x^3}{12} + \frac{32x^5}{240} + o(x^5)\right)$

$$= x^3 - \frac{8x^5}{12} + o(x^5)$$
$$- \frac{16x^5}{12} + o(x^5)$$
$$+ o(x^5)$$
$$\dots$$

$$\underset{x \to 0}{=} \boxed{x^3 - \frac{24x^5}{12} + o(x^5)}$$

Simplifie

• $v^4(x) \underset{x\to 0}{=} \left(x^3 - \frac{24x^5}{12} + o(x^5)\right)\left(x - \frac{8x^3}{12} + \frac{32x^5}{240} + o(x^5)\right)$

$= x^4 + o(x^5)$

$o(x^5)$

...

$\underset{x\to 0}{=} x^4 + o(x^5)$

et • $v^5(x) \underset{x\to 0}{=} x^5 + o(x^5)$

• $o(x^5) = o(x^5)$ oui

On a alors :

$$\frac{1}{2} \times 1 - \left(x - \frac{8x^3}{12} + \frac{32x^5}{240} + o(x^5)\right) + \left(x^2 - \frac{16x^4}{12} + o(x^5)\right) - \left(x^3 - \frac{24x^5}{12} + o(x^5)\right) + \left(x^4 + o(x^5)\right) - \left(x^5 + o(x^5)\right) + o(x^5).$$

A calculer.

Bon travail !