Corrigé de l'exercice de Révision Noël 01 - Matrices

Solution de l'exercice 1 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
f(x) \text{ existe} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+1-\frac{\pi}{2} > 0 \\ x \not\equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi] \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > \frac{\pi}{2} - 1 \\ \forall k \in \mathbb{Z},\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad x \in \left]\frac{\pi}{2} - 1; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left]\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right[\right).
\end{aligned}$$

Posons $I = \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right[$. I est un voisinage à droite de $\frac{\pi}{2}$ sur lequel f est bien définie. Pour tout $x \in I$, posons $t = x - \frac{\pi}{2}$ i.e. $x = \frac{\pi}{2} + t$. Alors, on a

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \frac{\ln(1+t)}{\left|\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)\right|} = \frac{\ln(1+t)}{|-\sin(t)|} = \frac{\ln(1+t)}{|\sin(t)|}.$$

Or pour $x \in I$, on a $t \in]0;\pi[$. Donc $\sin(t) > 0$. Ainsi,

$$f\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \frac{\ln(1+t)}{\sin(t)}$$

Or quand $x \to \frac{\pi}{2}$, on a $t \to 0$. De plus, $\ln(1+t) \underset{t\to 0}{\sim} t$ et $\sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$, donc par quotient,

$$f\left(\frac{\pi}{2} + t\right) \underset{\substack{t\to 0 \\ t>0}}{\sim} 1.$$

Ou encore

$$f(x) \underset{\substack{x\to \frac{\pi}{2} \\ x>\frac{\pi}{2}}}{\sim} 1.$$

Conclusion,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to \frac{\pi}{2} \\ x>\frac{\pi}{2}}} f(x) = 1.}$$

Solution de l'exercice 2 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Puisque P est triangulaire inférieure et qu'elle ne possède aucun coefficient diagonal nul, on en déduit que

$$\boxed{P \text{ est inversible.}}$$

Calculons son inverse. Par l'algorithme de Gauss-Jordan, on a

$$\begin{array}{ccc}
P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & & I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_2 \leftarrow -L_2 & \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

On observe que $P \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_3$, donc on retrouve bien que P est inversible de plus,

$$\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = P.}$$

On vérifie son résultat :

$$PP^{-1} = P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{OK.}$$

2. On a les égalités matricielles suivantes :

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP = PAP = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.}$$

3. Posons $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$. D'autre part, on a $A = PDP^{-1}$. Puis, par récurrence on montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = PD^nP^{-1}.$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2^{n+1} & -2^n & 0 \\ 3^n & 3^n & 3^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^{n+1}-2 & 2^n & 0 \\ 1-2^{n+1}+3^n & 3^n-2^n & 3^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^{n+1}-2 & 2^n & 0 \\ 1-2^{n+1}+3^n & 3^n-2^n & 3^n \end{pmatrix}.}$$

On vérifie son résultat pour $n = 0$ et $n = 1$.

4. Posons $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors, on observe que l'on a bien $A = D + N$. De plus, il est possible de vérifier que N est bien une matrice nilpotente d'ordre 3 (i.e. $N^3 = O_3$). Cependant on a

$$DN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$ND = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusion,

$$\boxed{ND \neq DN,}$$

donc les matrices N et D ne commutent pas et la formule du binôme de Newton sur ce couple de matrice ne s'applique pas.