Correction de l'exercice de Révision Noël 02 - Complexes

Solution de l'exercice 1 La fonction f est définie sur $U =]-1;0[\cup]0;+\infty[$ qui est bien un voisinage de 0. De plus, on a les égalités asymptotiques suivantes :

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$$
$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right) - x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)}{x} \\ &\underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} \frac{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right)}{x} \\ &\underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{=} -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right). \end{aligned}$$

On en déduit notamment que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = 0.$$

Donc

$$\boxed{f \text{ est bien prolongeable par continuité en 0 en posant } f(0)=0.}$$

De plus, par le développement limité précédent, on obtient également que

$$\boxed{\text{la courbe de } f \text{ admet pour tangente en 0 la droite } y = -\frac{x}{2}.}$$

Enfin, on a

$$f(x) + \frac{x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

Or deux équivalents ont même signe au voisinage considéré et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x^2}{2} \geqslant 0$. Conclusion,

$$\boxed{\text{la courbe de } f \text{ est au-dessus de sa tangente } \textbf{au voisinage} \text{ de 0.}}$$

Solution de l'exercice 2 On a les égalités suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left|a + \omega^k\, b\right| = \sum_{k=0}^{n-1} \left|\omega^k \left(a\,\omega^{-k} + b\right)\right| = \sum_{k=0}^{n-1} |\omega|^k \left|a\,\omega^{-k} + b\right|.$$

Or on observe que $\omega \in \mathbb{U}_n$ donc $\omega \in \mathbb{U}$ et donc $|\omega| = 1$. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left|a + \omega^k\, b\right| = \sum_{k=0}^{n-1} \left|a\,\omega^{-k} + b\right|.$$

Posons $p = n - k$ i.e. $k = n - p$, alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left|a + \omega^k\, b\right| = \sum_{p=1}^{n} \left|a\,\omega^{-(n-p)} + b\right| = \sum_{p=1}^{n} \left|a\,\omega^{p-n} + b\right| = \sum_{p=1}^{n} \left|a\,\omega^{p}\,\omega^{-n} + b\right|.$$

Or $\omega^n = 1$ donc $\omega^{-n} = (\omega^n)^{-1} = 1^{-1} = 1$. Conclusion, on a bien,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \left|a + \omega^k\, b\right| = \sum_{p=1}^{n} |a\,\omega^{p} + b|\,.}$$