Correction de l'exercice de Révision Noël 04 - Fonctions usuelles

Solution de l'exercice 1

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\sqrt{1+x^2} - x = \sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x = x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - x \qquad \text{car } x > 0.$$

Or

$$\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{u}{2} + \frac{(1/2)(-1/2)}{2}u^2 + o\left(u^2\right) \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o\left(u^2\right).$$

Posons $u(x) = \frac{1}{x^2}$. Alors $u(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc

$$\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

Ainsi,

$$\sqrt{1+x^2} - x = x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1\right) \underset{x\to+\infty}{=} x\left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

On sait que $\arctan(u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^3}{3} + o\left(u^3\right)$. Posons

$$u(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, $u(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$ donc $u^3(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{8x^3}$ i.e.

$$u^3(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Et enfin, $o\left(u^3(x)\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^3}\right)$. On obtient alors que

$$\begin{aligned}
\arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right) &= \arctan\left(u(x)\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{2x} \quad - \frac{1}{8x^3} \quad + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{3}\frac{1}{8x^3} \quad + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{2x} - \frac{4}{24x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \\
&\underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{2x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)
\end{aligned}$$

De plus, pour tout $x > 0$,

$$\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Finalement,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to+\infty}{=} 2\left(\frac{1}{2x}-\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\\ &\underset{x\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2}+o\left(\frac{1}{x^3}\right). \end{aligned}$$

Tout disparaît sauf le terme constant, étrange...

2. La fonction arctan est définie et même dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1+x^2 \geqslant 1 > 0$. Donc la fonction f est bien définie et même dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= 2\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)'}{1+\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^2}+\frac{1}{1+x^2}\\ &= 2\frac{\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}-1}{1+1+x^2-2x\sqrt{1+x^2}+x^2}+\frac{1}{1+x^2}\\ &= 2\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1}{2+2x^2-2x\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{1+x^2}\\ &= \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}-x(1+x^2)}+\frac{1}{1+x^2}\\ &= \frac{x-\sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)}+\frac{1}{1+x^2}\\ &= -\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x)=0.$$

$\mathbb{R}$ étant un intervalle, on en déduit que

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x)=C.$$

Or

$$f(0)=2\arctan(1)+\arctan(0)=2\frac{\pi}{4}+0=\frac{\pi}{2}.$$

Donc $C=\frac{\pi}{2}$. Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x)=2\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+\arctan(x)=\frac{\pi}{2}.}$$

3. Miracle ! On retrouve alors bien dans ce cas notamment que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ (et même $+o\left(\frac{1}{x^{1000}}\right)$ si l'on veut).