Correction de l'exercice de Révision Noël 06 - Analyse asymptotique

Solution de l'exercice 1

1. On sait que
$$\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right).$$
Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)$. Alors,
$$\begin{aligned}\cos\left(\mathrm{e}^x\right) &\underset{x\to 0}{=} \cos\left(1+u(x)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \cos(1)\cos\left(u(x)\right)-\sin(1)\sin\left(u(x)\right).\end{aligned}$$
Or $\cos(u) \underset{u\to 0}{=} 1-\frac{u^2}{2}+o\left(u^3\right)$ et $\sin(u) \underset{u\to 0}{=} u-\frac{u^3}{6}+o\left(u^3\right)$. Donc
$$\cos(1+u) \underset{u\to 0}{=} \cos(1)\cos(u)-\sin(1)\sin(u) \underset{u\to 0}{=} \cos(1)-\sin(1)u-\cos(1)\frac{u^2}{2}+\sin(1)\frac{u^3}{6}+o\left(u^3\right).$$
De plus, on a
   - $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
   - Puis
$$\begin{aligned}u(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x^2 \quad +\frac{x^3}{2} \quad +o\left(x^3\right)\\ &\qquad\qquad +\frac{x^3}{2} \quad +o\left(x^3\right)\\ &\qquad\qquad\qquad\quad +o\left(x^3\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x^2+x^3+o\left(x^3\right).\end{aligned}$$
   - Comme $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on en déduit que $u(x)^3 \underset{x\to 0}{\sim} x^3$ et donc
$$u(x)^3 \underset{x\to 0}{=} x^3+o\left(x^3\right).$$
   - Et enfin, $o\left(u(x)^3\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right)$.

   Ainsi,
$$\begin{aligned}\mathrm{e}^x &\underset{x\to 0}{=} \cos(1)-\sin(1)u-\cos(1)\frac{u^2}{2}+\sin(1)\frac{u^3}{6}+o\left(u^3\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \cos(1)-\sin(1)x \quad -\sin(1)\frac{x^2}{2} \quad -\sin(1)\frac{x^3}{6} \quad +o\left(x^3\right)\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad -\cos(1)\frac{x^2}{2} \quad -\cos(1)\frac{x^3}{2} \quad +o\left(x^3\right)\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\sin(1)\frac{x^3}{6} \quad +o\left(x^3\right)\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +o\left(x^3\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \cos(1)-\sin(1)x-\frac{\cos(1)+\sin(1)}{2}x^2-\frac{\cos(1)}{2}x^3+o\left(x^3\right).\end{aligned}$$
D'autre part, on a
$$\frac{x}{1+x} \underset{x\to 0}{=} x\left(1-x+x^2+o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} x-x^2+x^3+o\left(x^3\right).$$
Posons $v(x) \underset{x\to 0}{=} x-x^2+x^3+o\left(x^3\right)$. On sait que $\tan(v) \underset{v\to 0}{=} v+\frac{v^3}{3}+o\left(v^3\right)$. Or

- $v(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
- Comme $v(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, alors $v(x)^3 \underset{x\to 0}{\sim} x^3$ et donc
$$v(x)^3 \underset{x\to 0}{=} x^3 + o\left(x^3\right).$$
- Enfin, $o\left(v(x)^3\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\tan\left(\frac{x}{1+x}\right) &\underset{x\to 0}{=} v(x) - \tfrac{v(x)^3}{3} + o\left(v(x)^3\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} x - x^2 \quad + x^3 \quad + o\left(x^3\right)\\
&\qquad\qquad\quad -\tfrac{x^3}{3} \quad + o\left(x^3\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + o\left(x^3\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} x - x^2 + \tfrac{2x^3}{3} + o\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos\left(\mathrm{e}^x\right) + a\tan\left(\frac{x}{1+x}\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \cos(1) - \sin(1)x - \frac{\cos(1)+\sin(1)}{2}x^2 - \frac{\cos(1)}{2}x^3 + o\left(x^3\right) + ax - ax^2 + a\frac{2x^3}{3} + o\left(x^3\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \cos(1) + (a - \sin(1))\,x - \left(\frac{\cos(1)+\sin(1)}{2} + a\right)x^2 + \left(\frac{2a}{3} - \frac{\cos(1)}{2}\right)x^3 + o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \cos(1) + (a - \sin(1))\,x - \left(\frac{\cos(1)+\sin(1)}{2} + a\right)x^2 + \left(\frac{2a}{3} - \frac{\cos(1)}{2}\right)x^3 + o\left(x^3\right).}$$

2. Par la question précédente, pour que 0 soit un extremum (condition nécessaire) il faut que $a - \sin(1) = 0$. i.e.
$$\boxed{a = \sin(1).}$$
Dans ce cas, on a
$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to 0}{=} \cos(1) - \left(\frac{\cos(1)+\sin(1)}{2} + \sin(1)\right)x^2 + \left(\frac{2\sin(1)}{3} - \frac{\cos(1)}{2}\right)x^3 + o\left(x^3\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \cos(1) - \frac{\cos(1)+3\sin(1)}{2}x^2 + \frac{4\sin(1)-3\cos(1)}{6}x^3 + o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$
En tronquant à l'ordre 2, on obtient que
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \cos(1) - \frac{\cos(1)+3\sin(1)}{2}x^2 + o\left(x^2\right).$$
On obtient alors la condition suffisante : puisque $\frac{\cos(1)+3\sin(1)}{2} > 0$, que $f(x) - \cos(1) = f(x) - f(0) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{\cos(1)+3\sin(1)}{2}x^2$ et que deux équivalents ont même signe au voisinage considéré, on en déduit que au voisinage de 0, $f(x) \leqslant \cos(1) = f(0)$. Conclusion, dans ce cas,
$$\boxed{\text{si } a = \sin(1), \text{ alors } 0 \text{ est un maximum local de } f.}$$

3. La fonction $x \mapsto \cos\left(e^x\right)$ est définie et même $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$. D'autre part, pour tout $x \in]-1;+\infty[$, on a

$$\begin{aligned}
-\frac{\pi}{2} < \frac{x}{1+x} < \frac{\pi}{2} \quad & \Leftrightarrow \quad -(1+x)\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}(1+x) && \text{car } x+1>0 \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x\left(1+\frac{\pi}{2}\right) > -\frac{\pi}{2} \\ x\left(\frac{\pi}{2}-1\right) > -\frac{\pi}{2} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > -\frac{\pi}{2+\pi} \\ x > -\frac{\pi}{\pi-2} \end{cases} && \text{car } \frac{\pi}{2} > 1
\end{aligned}$$

Posons $m = \min\left(\frac{\pi}{2+\pi}; \frac{\pi}{\pi-2}; 1\right) > 0$. Alors pour tout $x > m$, $\frac{x}{1+x} \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et donc $\tan\left(\frac{x}{1+x}\right)$ est bien définie et même $\mathscr{C}^3$ sur $I =]-m;+\infty[$ qui est bien un voisinage de 0. Donc f' existe et est même $\mathscr{C}^2$ sur I donc par le théorème de Taylor-Young, f' admet un développement limité à l'ordre 2 en 0, il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$f'(x) \underset{x \to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o\left(x^2\right).$$

Or f est une primitive de f sur I, donc par le théorème de primitivation des développements limités,

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} f(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + o\left(x^3\right).$$

Or par la question précédente,

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \cos(1) - \frac{\cos(1) + 3\sin(1)}{2}x^2 + \frac{4\sin(1) - 3\cos(1)}{6}x^3 + o\left(x^3\right).$$

Donc par unicité du développement limité, on a

$$\begin{cases} f(0) = \cos(1) \text{ OK} \\ a_0 = 0 \\ \frac{a_1}{2} = -\frac{\cos(1)+3\sin(1)}{2} \Leftrightarrow a_1 = -\left(\cos(1) + 3\sin(1)\right) \\ \frac{a_2}{3} = \frac{4\sin(1)-3\cos(1)}{6} \Leftrightarrow a_2 = \frac{4\sin(1)-3\cos(1)}{2} \end{cases}$$

Conclusion,

$$\boxed{f'(x) \underset{x \to 0}{=} -\left(\cos(1) + 3\sin(1)\right)x + \frac{4\sin(1) - 3\cos(1)}{2}x^2 + o\left(x^2\right).}$$