# Correction de l'exercice de Révision Noël 07 - Matrice

**Solution de l'exercice 1** On sait que

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right).$$

Donc

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} \ln\left(2 + x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o\left(x^4\right)\right). \end{aligned}$$

On sait que $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o(u^4)$. Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^4)$. Alors,

- $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
- De plus,

$$\begin{aligned} u(x)^2 &\underset{x\to 0}{=} \left(\tfrac{x}{2} - \tfrac{x^3}{12} + o(x^4)\right)\left(\tfrac{x}{2} - \tfrac{x^3}{12} + o(x^4)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{ccc} \frac{x^2}{4} & -\frac{x^4}{24} & +o(x^4) \\ & -\frac{x^4}{24} & +o(x^4) \\ & & +o(x^4) \end{array} \\ &\underset{x\to 0}{=} \tfrac{x^2}{4} - \tfrac{x^4}{12} + o(x^4). \end{aligned}$$

- De même,

$$\begin{aligned} u(x)^3 &\underset{x\to 0}{=} \left(\tfrac{x}{2} - \tfrac{x^3}{12} + o(x^4)\right)\left(\tfrac{x^2}{4} - \tfrac{x^4}{12} + o(x^4)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \tfrac{x^3}{8} + o(x^4). \end{aligned}$$

- Et encore, puisque $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$, on a $u(x)^4 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^4}{16}$ i.e.

$$u(x)^4 \underset{x\to 0}{=} \frac{x^4}{16} + o\left(x^4\right)$$

- Enfin, $o(u(x)^4) \underset{x\to 0}{=} o(x^4)$.

D'où

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} \begin{array}{cccccc} \ln(2) + \frac{x}{2} & & -\frac{x^3}{12} & & +o(x^4) \\ & -\frac{x^2}{8} & & +\frac{x^4}{24} & +o(x^4) \\ & & +\frac{x^3}{24} & & +o(x^4) \\ & & & -\frac{x^4}{64} & +o(x^4) \\ & & & & +o(x^4) \end{array} \\ &\underset{x\to 0}{=} \ln(2) + \tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{8} - \tfrac{x^3}{24} + \tfrac{8-3}{192}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{=} \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{24} + \frac{5x^4}{192} + o\left(x^4\right).}$$

**Solution de l'exercice 2**

1. Par définition,
$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
On a les opérations élémentaires suivantes :
$$J \underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J' \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1. \end{matrix}$$
La matrice $J'$ est triangulaire supérieure et possède des zéros sur sa diagonale. Donc $J'$ n'est pas inversible. Or $J \underset{\mathscr{L}}{\sim} J'$. Conclusion,
$$\boxed{J \text{ n'est pas inversible.}}$$
2. On a directement
$$\boxed{\operatorname{tr}(J) = 1 + 1 + 1 = 3.}$$
3. On remarque que ${}^tJ = J \neq -J$. Donc
$$\boxed{\text{la matrice } J \text{ est symétrique mais n'est pas antisymétrique.}}$$
4. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$. On a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} X \in \mathscr{S}_\lambda \quad &\Leftrightarrow \quad XJ = \lambda X \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + z + t = \lambda x \\ x + y + z + t = \lambda y \\ x + y + z + t = \lambda z \\ x + y + z + t = \lambda t. \end{cases} \end{aligned}$$
Exceptionnellement, puisque la forme est un peu particulière on va déroger un peu au traditionnel pivot de Gauss. On a
$$X \in \mathscr{S}_\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y + z + t = \lambda x \\ 0 = \lambda (y - x) \\ 0 = \lambda (z - x) \\ 0 = \lambda (t - x) \end{cases} \qquad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix}$$
$$\Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (1 - \lambda) x + y + z + t = 0 \\ \lambda (y - x) = 0 \\ \lambda (z - x) = 0 \\ \lambda (t - x) = 0. \end{cases}$$

*Premier cas,* supposons $\lambda = 0$. Alors,

$$X \in \mathscr{S}_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad x = -y-z-t.$$

Dès lors, on obtient alors une seule inconnue principale (ici $x$) et trois inconnues paramètres (ici $y$, $z$, $t$)

$$\boxed{\mathscr{S}_0 = \left\{ X = \begin{bmatrix} -y-z-t \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; (y,z,t) \in \mathbb{R}^3 \right\}.}$$

Ou encore $\mathscr{S}_0 = \left\{ y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; (y,z,t) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ et donc

$$\boxed{\mathscr{S}_0 = \mathrm{Vect}\left( \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).}$$

On suppose maintenant que $\lambda \neq 0$. Alors,

$$X \in \mathscr{S}_\lambda \qquad \Leftrightarrow \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} (1-\lambda)\,x+y+z+t=0 \\ y-x=0 \\ z-x=0 \\ t-x=0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_3 \\ L_4 \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_4 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{cases} (1-\lambda)\,x+x+x+x=0 \\ y=x \\ z=x \\ t=x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{cases} (4-\lambda)\,x=0 \\ y=x \\ z=x \\ t=x \end{cases}$$

*Deuxième cas,* on suppose que $\lambda = 4$. Alors,

$$X \in \mathscr{S}_4 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} 0=0 \\ y=x \\ z=x \\ t=x \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas, une seule inconnue paramètre ($x$) et trois inconnues principales ($y$, $z$, $t$). Conclusion,

$$\boxed{\mathscr{S}_4 = \left\{ X = \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left( \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).}$$

*Troisième cas,* on suppose que $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0; 4\}$. Alors,

$$X \in \mathscr{S}_\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = x \\ z = x \\ t = x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad X = 0_{\mathbb{R}^4}.$$

Conclusion, dans tous ces autres cas,

$$\boxed{\mathscr{S}_\lambda = \{0_{\mathbb{R}^4}\}.}$$