Correction de l'exercice de Révision Noël 08 - Intégration

Solution de l'exercice 1

1. La fonction $f : t \mapsto \frac{\arctan(t)}{t}$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. Donc par le théorème fondamentale de l'analyse, on sait non seulement que $\boxed{F \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}_+^*}$ mais est même $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et est l'unique primitive de f s'annulant en 1.
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{1+t^2} = \frac{1}{t(1+t^2)} \\ \Leftrightarrow \quad & \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{a + at^2 + bt^2 + ct}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t(1+t^2)} \\ \Leftrightarrow \quad & \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad (a+b)t^2 + ct + a = 1 \qquad \text{car } t \neq 0 \text{ et } 1 + t^2 \neq 0 \end{aligned}$$

   On note que pour la dernière assertion soit vraie, il suffit de vérifier

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ c = 0 \\ a = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b = -1 \\ c = 0 \\ a = 1. \end{cases}$$

   Conclusion, on a

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\frac{2t}{1+t^2}.}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On pose

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \begin{cases} u(t) = \arctan(t) \\ v(t) = -\frac{1}{t}. \end{cases}$$

   Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \begin{cases} u'(t) = \frac{1}{1+t^2} \\ v'(t) = \frac{1}{t^2}. \end{cases}$$

   Donc par intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} F(x) &= \left[-\frac{\arctan(t)}{t}\right]_{t=1}^{t=x} - \int_1^x \frac{-1}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\arctan(x)}{x} + \arctan(1) + \int_1^x \frac{1}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\arctan(x)}{x} + \frac{\pi}{4} + \int_1^x \frac{1}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Or par la question précédente, pour tout $t > 0$, $\frac{1}{t(1+t^2)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2} = \frac{1}{t} - \frac{1}{2}\frac{2t}{1+t^2}$. Donc on note que $t \mapsto \ln(|t|) - \frac{1}{2}\ln(|1+t^2|) = \ln(t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$ est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t(1+t^2)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{\arctan(x)}{x} + \frac{\pi}{4} + \left[\ln(t) - \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)\right]_{t=1}^{t=x} \\ &= -\frac{\arctan(x)}{x} + \frac{\pi}{4} + \ln(x) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{2}\ln(2). \end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad F(x) = -\frac{\arctan(x)}{x} + \frac{\pi}{4} + \ln(x) - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{2}\ln(2).}$$

4. On sait que

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right).$$

Donc

$$-\frac{\arctan(x)}{x} \underset{x\to 0}{=} -1 - \frac{x^2}{3} + o\left(x^2\right).$$

De plus, on sait que $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u + o(u)$. Donc en posant $u = x^2 \underset{x\to 0}{\to} 0$, on a

$$-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right).$$

Ainsi, à l'aide de la question précédente,

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{\arctan(x)}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) \\ &\underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{=} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(2) - 1 - \frac{x^2}{3} + o\left(x^2\right) - \frac{1}{2}x^2 + o\left(x^2\right) \\ &\underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{=} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(2) - 1 - \frac{5x^2}{6} + o\left(x^2\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$G(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{=} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(2) - 1 - \frac{5x^2}{6} + o\left(x^2\right).$$

En particulier, G admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 et

$$G(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{=} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(2) - 1 + o(x).$$

donc $\boxed{G \text{ est prolongeable par continuité en } 0}$, en posant

$$G(0) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(2) - 1.$$

De plus, $\boxed{\text{on sait que ce prolongement est lui-même dérivable en } 0}$ et

$$G'(0) = 0.$$

Puis la tangente de G en 0 est la droite horizontale d'équation

$$\boxed{y = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(2) - 1.}$$

Enfin,

$$G(x) - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(2) - 1\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{5x^2}{6}.$$

Or deux équivalents ont même signe au voisinage du point considéré donc on en déduit que la courbe représentative de G est $\boxed{\text{en-dessous de sa tangente}}$ au voisinage de 0^+.

On peut même remarquer que 0 *est un maximum local de* G.