Correction de l'exercice de Révision Noël 09 - Equation différentielle

Solution de l'exercice 1 Puisque $2x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on obtient que

$$\begin{aligned}2+\sin(2x) &\underset{x\to 0}{=} 2+2x-\frac{8x^3}{6}+\frac{32x^5}{120}+o\left(x^5\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} 2+2x-\frac{4x^3}{3}+\frac{8x^5}{30}+o\left(x^5\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} 2+2x-\frac{4x^3}{3}+\frac{4x^5}{15}+o\left(x^5\right).\end{aligned}$$

Posons $f : x \mapsto \frac{1}{2+\sin(2x)}$. On a alors

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2+2x-\frac{4x^3}{3}+\frac{4x^5}{15}+o\left(x^5\right)} \qquad \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\frac{1}{1+x-\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o\left(x^5\right)}$$

On sait que $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1-u+u^2-u^3+u^4-u^5+o\left(u^5\right)$. Posons $u(x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o\left(x^5\right)$. Alors,

- $u(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
- De plus,

$$\begin{aligned}u(x)^2 &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} \left(x-\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o\left(x^5\right)\right)\left(x-\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o\left(x^5\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} x^2 \quad -\frac{2x^4}{3} \quad +o\left(x^5\right)\\ &\qquad\qquad -\frac{2x^4}{3} \quad +o\left(x^5\right)\\ &\qquad\qquad\qquad\quad +o\left(x^5\right)\\ &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} x^2-\frac{4x^4}{3}+o\left(x^5\right).\end{aligned}$$

- Puis,

$$\begin{aligned}u(x)^3 &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} \left(x-\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o\left(x^5\right)\right)\left(x^2-\frac{4x^4}{3}+o\left(x^5\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} x^3 \quad -\frac{4x^5}{3} \quad +o\left(x^5\right)\\ &\qquad\qquad -\frac{2x^5}{3} \quad +o\left(x^5\right)\\ &\qquad\qquad\qquad\quad +o\left(x^5\right)\\ &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} x^3-2x^5+o\left(x^5\right).\end{aligned}$$

- Et encore,

$$\begin{aligned}u(x)^4 &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} \left(x^2-\frac{4x^4}{3}+o\left(x^5\right)\right)\left(x^2-\frac{4x^4}{3}+o\left(x^5\right)\right)\\ &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} x^4+o\left(x^5\right).\end{aligned}$$

- Puisque $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, alors $u(x)^5 \underset{x\to 0}{\sim} x^5$ et donc

$$u(x)^5 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} x^5+o\left(x^5\right).$$

- Enfin, $o\left(u(x)^5\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^5\right)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
f(x) &\underset{x\to 0}{=} \tfrac{1}{2}\left(1-u(x)+u^2(x)-u^3(x)+u^4(x)-u^5(x)+o\left(u(x)^5\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} \tfrac{1}{2}\Big(1-x \qquad\quad +\tfrac{2x^3}{3} \qquad\quad -\tfrac{2x^5}{15} \quad +o\left(x^5\right)\\
&\qquad\qquad +x^2 \qquad\quad -\tfrac{4x^4}{3} \qquad\quad +o\left(x^5\right)\\
&\qquad\qquad\qquad -x^3 \qquad\quad +2x^5 \quad +o\left(x^5\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +x^4 \qquad\quad +o\left(x^5\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -x^5 \quad +o\left(x^5\right)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +o\left(x^5\right)\Big)\\
&\underset{x\to 0}{=} \tfrac{1}{2}\left(1-x+x^2-\tfrac{x^3}{3}-\tfrac{x^4}{3}+\tfrac{13x^5}{15}+o\left(x^5\right)\right).
\end{aligned}$$

Conclusion,

$$\boxed{\frac{1}{2+\sin(2x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{6}+\frac{13x^5}{30}+o\left(x^5\right).}$$

Solution de l'exercice 2 On considère l'équation

$$(E) \qquad \forall x\in\mathbb{R}, \qquad y'(x)+y(x)=\cos(x).$$

Les fonctions $a : x \mapsto 1$ et $b : x \mapsto \cos(x)$ sont continues donc par le théorème de Cauchy, (E) admet des solutions. L'équation homogène associée est donnée par

$$(E_0) \qquad \forall x\in\mathbb{R}, \qquad y'(x)+y(x)=0.$$

Soit $a : x \mapsto 1$. La fonction a est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives dont l'une est donnée par $A : x \mapsto x$. Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_0) est donné par

$$\mathscr{S}_{E_0} = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & C\,\mathrm{e}^{-x} \end{array} \;\middle|\; C\in\mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^{-x} \end{array} \right).$$

Procédons maintenant à la méthode de variation de la constante. Soient y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $y_0 : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$. La fonction y_0 ne s'annule pas, on pose donc $\lambda : x \mapsto \frac{y(x)}{y_0(x)}$. La fonction λ est donc bien définie et même dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, on a $y = \lambda\, y_0$ et donc

$$\begin{aligned}
& y \text{ solution de } (E)\\
\Leftrightarrow\quad & \forall x\in\mathbb{R}, \qquad \lambda'(x)y_0(x) + \underbrace{\lambda(x)y_0'(x)+\lambda(x)y_0(x)}_{=0 \text{ car } y_0\in\mathscr{S}_{E_0}} = \cos(x)\\
\Leftrightarrow\quad & \forall x\in\mathbb{R}, \qquad \lambda'(x)y_0(x) = \cos(x)\\
\Leftrightarrow\quad & \forall x\in\mathbb{R}, \qquad \lambda'(x) = \frac{\cos(x)}{y_0(x)} = \cos(x)\,\mathrm{e}^{x} \qquad\qquad \text{car } y_0(x)=\mathrm{e}^{-x}\neq 0\\
\Leftrightarrow\quad & \forall x\in\mathbb{R}, \qquad \lambda'(x) = \frac{\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix}}{2}\,\mathrm{e}^{x} = \frac{\mathrm{e}^{(1+i)x}}{2}+\frac{\mathrm{e}^{(1-i)x}}{2} \qquad\qquad \text{par la formule d'Euler}\\
\Leftrightarrow\quad & \exists C\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R}, \qquad \lambda(x) = \frac{\mathrm{e}^{(1+i)x}}{2\,(1+i)}+\frac{\mathrm{e}^{(1-i)x}}{2\,(1-i)}+C.
\end{aligned}$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{e}^{(1+i)x}}{2(1+i)} + \frac{\mathrm{e}^{(1-i)x}}{2(1-i)} &= \frac{\mathrm{e}^{(1+i)x}(1-i) + \mathrm{e}^{(1-i)x}(1+i)}{2(1+1)} \\
&= \mathrm{e}^x \frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix} - i\,\mathrm{e}^{ix} + i\,\mathrm{e}^{ix}}{4} + C = \mathrm{e}^x \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{4} - i \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{4} \right) \\
&= \mathrm{e}^x \left(\frac{\cos(x)}{2} - i \frac{2i\sin(x)}{4} \right) \\
&= \mathrm{e}^x \frac{\cos(x) + \sin(x)}{2}.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda(x) = \mathrm{e}^x \frac{\cos(x) + \sin(x)}{2} + C \\
&\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \lambda(x) y_0(x) = \left[\mathrm{e}^x \frac{\cos(x) + \sin(x)}{2} + C \right] \mathrm{e}^{-x} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \frac{\cos(x) + \sin(x)}{2} + C\,\mathrm{e}^{-x}.
\end{aligned}$$

Il était aussi possible de cherche une solution particulière directement de la forme $x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x)$.

Finalement, l'ensemble des solutions de (E) est donné par

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\cos(x)+\sin(x)}{2} + C\,\mathrm{e}^{-x} \end{array} \;\middle|\; C \in \mathbb{R} \right\}.}$$