Exercices de Révision de printemps 01

1) $\varphi : x \to \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$.

Soit $f : t \to \frac{1}{\ln(t)}$. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$f(t)$ existe $\Leftrightarrow$ $\ln(t) \neq 0$ et $t > 0$.
$\Leftrightarrow$ $t \neq 1$ et $t > 0$. oui !

Donc f est bien définie et même continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$
bien.
Soit $x \in \mathbb{R}$, ainsi on a :

$\varphi(x)$ existe $\Leftrightarrow$ $[x ; x^2] \subseteq \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ oui !
$\Leftrightarrow$ $0 < x$ et $x \neq 1$ et $x^2 > 0$ et $x^2 \neq 1$.
$\Leftrightarrow$ $x > 0$ et $x \neq 1$ OK

Donc φ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. OK à encadrer

2) Posons $U_1 =]0,1[$ et $U_2 =]1,+\infty[$ ✓

On a $U = U_1 \cup U_2$.

N'existe pas !

- On pose $F : x \to \int_0^x \frac{dt}{\ln(t)}$. La fonction $t \to \frac{1}{\ln(t)}$ est continue sur U_1. Ainsi par le théorème fondamental de l'analyse la fonction F est C^1 sur U_2. ✓
- De plus la fonction $t \to \frac{1}{\ln(t)}$ est continue sur U_2. Ainsi par le théorème fondamental de l'analyse la fonction F est C^1 sur U_2. Non plus il faut changer la borne inférieure

Donc F est C^1 sur $U_1 \cup U_2$ donc C^1 sur U.
De plus $\forall x \in U$ $F'(x) = \frac{1}{\ln(t)}$. et $\forall x \in U$

$$\varphi(x) = \int_{\cancel{0}}^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} - \int_{\cancel{0}}^{x} \frac{dt}{\ln(t)} = F(x^2) - F(x)$$

Donc φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ en tant que composées de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

$$\varphi'(x) = 2x\, F'(x^2) - F'(x)$$ OK

$$= \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)}.$$ V

Conclusion.

φ est $\mathcal{C}^1$ sur V et $\forall x \in V$ $\boxed{\varphi'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)}}$ à simplifier.

A encadrer

3) . $\frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ par croissance comparée. V

Donc $\exists\, x_0 \in]1, +\infty[$ tel que $\forall t \geq x_0$.

$$0 \leq \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \leq 1.$$ oui

$\Rightarrow \forall t \geq x_0. \quad 0 \leq \ln(t) \leq \sqrt{t}$ V

Par passage à l'inverse

$\Rightarrow \forall t \geq x_0 \quad 0 \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\ln(t)}$ V car $t \geq x_0$.

Soit $x \geq x_0$ alors $[x ; x^2] \subseteq [x_0 ; +\infty[$ oui

Donc $\forall t \in [x ; x^2]$ $\frac{1}{\ln(t)} \geq \frac{1}{\sqrt{t}}.$ V

Ainsi par croissance ~~comparée~~ de l'intégrale car $x^2 > x$. oui car $x \geq 1$

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\, dt \geq \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt$$

Donc $F(x) \geq \left[2\sqrt{t}\right]_x^{x^2}$ V $= 2(x - \sqrt{x}) = 2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)$ V.

$2\sqrt{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et $\sqrt{x} - 1 \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ V

Donc par le théorème de minoration :

$$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} = +\infty.$$ TB !