Correction Printemps 01
Intégration

Solution de l'exercice 1

1. Soit $x \in U$.
   - Premier cas $x > 1$, alors $x^2 > x > 1$. Or la fonction ln est continue et non nulle sur $[x; x^2]$. Donc $f : t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est définie et continue sur $[x; x^2]$. Donc $\varphi(x)$ existe.
   - Second cas $0 < x < 1$, alors $0 < x^2 < x < 1$ donc la fonction ln est continue et non nulle sur $[x^2; x]$ donc $f : t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est définie et continue sur $[x^2 : x]$ et donc φ existe bien.

   Dans tous les cas $\varphi(x)$ existe et ce pour tout $x \in U$. Conclusion,

   $$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est bien définie sur } U = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}.}$$

2. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est continue sur l'intervalle $]1; +\infty[$ donc par le théorème fondamentale de l'analyse,

   $$F_2 \quad : \quad x \mapsto \int_2^x \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$$

   est dérivable sur $]1; +\infty[$ et $F_2' = f$ sur $]1; +\infty[$. Donc F_2' est continue et F_2 est $\mathscr{C}^1$ sur $]1; +\infty[$. Soit $x > 1$. Alors $x^2 > x > 1$, et toujours par le théorème fondamental de l'analyse,

   $$\varphi(x) = F_2\left(x^2\right) - F_2(x).$$

   Donc par différence et composition de fonctions $\mathscr{C}^1$, φ est $\mathscr{C}^1$ sur $]1; +\infty[$ et

   $$\forall x > 1, \quad \varphi'(x) = 2xF_2'\left(x^2\right) - F_2'(x) = \frac{2x}{\ln\left(x^2\right)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x}{\ln(x)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)}.$$

   De même $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ est aussi continue sur l'intervalle $]0; 1[$ et donc par le théorème fondamentale de l'analyse,

   $$F_{1/2} \quad : \quad x \mapsto \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$$

   est $\mathscr{C}^1$ sur $]1; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; 1[$, $F_{1/2}'(x) = \frac{1}{\ln(x)}$. Or pour tout $x \in]0; 1[$, on a $x^2 \in]0; 1[$ et donc

   $$\varphi(x) = F_{1/2}\left(x^2\right) - F_{1/2}\left(x\right).$$

   Donc par différence et composition de fonctions $\mathscr{C}^1$, φ est aussi $\mathscr{C}^1$ sur $]0; 1[$ et

   $$\forall x \in]0; 1[, \quad \varphi'(x) = 2xF_2'\left(x^2\right) - F_2'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}.$$

   On a donc bien montré

   $$\boxed{\varphi \in \mathscr{C}^1(U) \qquad \text{et} \qquad \forall x \in U, \qquad \varphi'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}.}$$

3. Soit $x > 1$. Par croissance de la fonction logarithme, on a pour tout $t \in [x; x^2]$, $\ln(t) \leqslant \ln\left(x^2\right) = 2\ln(x)$ alors

   $$\forall t \in \left[x; x^2\right], \qquad \frac{1}{2\ln(x)} \leqslant \frac{1}{\ln(t)}.$$

Donc par croissance de l'intégrale car, $x^2 > x$ car $x > 1$, on a

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{2\ln(x)}\,\mathrm{d}t \leqslant \varphi(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \varphi(x) \geqslant \frac{1}{2\ln(x)} \int_x^{x^2} 1\,\mathrm{d}t = \frac{x^2 - x}{2\ln(x)}.$$

Or

$$\frac{x^2 - x}{2\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^2}{2\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \qquad \text{par croissance comparée.}$$

Donc par le théorème de minoration,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty.}$$