Exercice Printemps 02
Représentation matricielle

Exercice 1 Soit

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ a_0 + a_1 X + a_2 X^2 & \mapsto & 3a_1 - 2a_2 + (9a_1 - 6a_0 - 4a_2)\, X - (6a_0 - 6a_1 + a_2)\, X^2. \end{array}$$

On note $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On pose $P_1 = X + 1$, $P_2 = 3X^2 + 2X$ et $P_3 = 2X^2 + 2X + 1$ et $\mathscr{B} = (P_1, P_2, P_3)$.

1. Calculer A la matrice canoniquement associée à f.
2. *Méthode 1.*
   (a) Montrer que $\mathscr{B}$ est libre. Que peut-on en déduire ?
   (b) Calculer $f(\mathscr{B})$.
   (c) En déduire sans calculer de matrice de passage, $D = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$.
3. *Méthode 2.*
   (a) Déterminer la matrice de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{C}$ et montrer que cette matrice est inversible. Que peut-on en déduire ?
   (b) Déterminer la matrice de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{B}$.
   (c) En déduire à nouveau $D = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$.