Daniel Antoine

Exercice Printemps 02 Représentation matricielle

Exercice 1

1. Soit $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathrm{R}_2[X]$, *on a alors*

$$f(1) = -6X - 6X^2$$ ✓

$$f(X) = 3 + 9X + 6X^2$$ ✓

$$f(X^2) = -2 - 4X - X^2$$ ✓

D'où A la matrice canoniquement associée à f :

$$\boxed{\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -6 & 9 & -4 \\ -6 & 6 & -1 \end{pmatrix}}$$

Bien.

2. *Méthode 1.*

(a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in R^3$ *tels que*

$$\lambda_1(X+1) + \lambda_2(3X^2 + 2X) + \lambda_3(2X^2 + 2X + 1) = 0$$ ✓

$$\Leftrightarrow \lambda_1 + \lambda_3 + X(\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3) + X^2(3\lambda_2 + 2\lambda_3) = 0$$ ✓

D'où par unicité des coefficients des polynômes on (oui) a :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 & = 0 \\ 3\lambda_2 + 2\lambda_3 & = 0 \end{cases}$$ ✓

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 & = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \quad L2 \leftarrow L2 - L1 \\ 3\lambda_2 + 2\lambda_3 & = 0 \end{cases}$$ ✓

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 & = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \quad L3 \leftarrow L3 - L2 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \end{cases}$$ v

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_2 & = 0 \quad L2 \leftarrow L2 - L3 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = 0 \end{cases}$$ v

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & = 0 \\ \lambda_2 & = 0 \\ \lambda_3 & = 0 \end{cases}$$ oui

Donc $\mathscr{B}$ est libre v *de plus la famille $\mathscr{B}$ possède* 3 *éléments et dim*$(\mathbb{R}_2[X]) =$ 3 v. *Donc la famille $\mathscr{B}$ est une base de* $\mathbb{R}_2[X]$ Bien.
conclusion :

$\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X]}$ v

(b) On a

$$\boxed{\text{f}(\mathscr{B})=(\text{f(P1)},\text{f(P2)},\text{f(P3)}) =(3+3x,6+15\text{X}^2, 2 + 4X + 4X^2)}$$ Non justifié !

(c) On a

Puisque f est l'application canoniquement associée à A , on a

$$\text{f(P1)=A P1=} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -6 & 9 & -4 \\ -6 & 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$ v = ...

$$\text{f(P2)=A P2=} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -6 & 9 & -4 \\ -6 & 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$ Mieux = ...

$$\text{f(P3)=A P3=} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -6 & 9 & -4 \\ -6 & 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$ v = ...

Conclusion ,

$$\boxed{\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

Parachutage.

3. *Méthode 2.*
(a)on a :

$$\mathscr{B}=(\mathrm{X}+1,3\mathrm{X}^2+2X;2X^2+2X+1)$$

En appliquant l'algorithme de Gauss-Jordan, on a les calculs suivants :

$$mat_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

I_3

$$\tilde{\mathscr{L}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \; L2 \leftarrow L2 - L1 \; \tilde{\mathscr{L}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathscr{L}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \; L2 \leftarrow L2\frac{1}{2} \; \tilde{\mathscr{L}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathscr{L}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \; L3 \leftarrow L3 - 3L2 \; \tilde{\mathscr{L}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathscr{L}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \; L1 \leftarrow L1 - 2L3 \quad ; L2 \leftarrow L2 - L3 \; \tilde{\mathscr{L}} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathscr{L}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; L3 \leftarrow 2L3 \; \tilde{\mathscr{L}} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Bien.

Conclusion,

$$\boxed{\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})\ \textit{est inversible et}\ (mat_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}))^{-}1 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}}$$ oui

On en ~~déduis~~ donc que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ oui

(b)

On a $\mathscr{C}$=(1,X,X^2), B= $(P1, P2, P3)$, $D'o$ù bof

$$X^2 = -2P2 - P2 + 2P3$$
$$X=3P1+2P2-3P3$$
$$1=-2P1-2P2+3P3$$

direct

$$\text{Donc}\ \boxed{\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}}$$

(c)

oui !

On a que D=$\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f) = P^-1AQ$ *avec*

$$A = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f)$$
$$Q = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})$$ v
$$P^-1 = mat_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$$

Donc

$$D=\begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -6 & 9 & -4 \\ -6 & 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$ v

Conclusion :

$$\boxed{D=\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$ Très bien !