# Correction Printemps 02
# Représentation matricielle

**Solution de l'exercice 1**

1. On a $f(1) = -6X - 6X^2$. Donc $\text{mat}_{\mathscr{C}}(f(1)) = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ -6 \end{bmatrix}$. De même, $f(X) = 3 + 9X + 6X^2$ et $f(X^2) = -2 - 4X - X^2$. Conclusion,
$$\boxed{A = \text{mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -6 & 9 & -4 \\ -6 & 6 & -1 \end{pmatrix}.}$$

2. *Méthode 1.*
   (a) Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Alors,
$$\begin{aligned} & \lambda_1 (X+1) + \lambda_2 \left(3X^2 + 2X\right) + \lambda_3 \left(2X^2 + 2X + 1\right) = 0_{\mathbb{R}[X]} \\ \Leftrightarrow \quad & (3\lambda_2 + 2\lambda_3) X^2 + (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3) X + \lambda_1 + \lambda_3 = 0_{\mathbb{R}[X]}. \end{aligned}$$
   Par unicité des coefficients d'un polynôme :
$$\begin{aligned} \begin{cases} 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} && L_1 \leftrightarrow L_3 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} && L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 = 0 \end{cases} && L_3 \leftrightarrow L_3 - 2L_2 \\ & \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \end{aligned}$$
   Conclusion,
$$\boxed{\mathscr{B} \text{ est libre.}}$$
   Or $\text{Card}(\mathscr{B}) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$. Conclusion,
$$\boxed{\mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$$

   (b) Puisque $P_1 = X + 1$, par la formule $Y = AX$, on a
$$\text{mat}_{\mathscr{C}}(f(P_1)) = A\text{mat}_{\mathscr{C}}(P_1) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -6 & 9 & -4 \\ -6 & 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 3\text{mat}_{\mathscr{C}}(P_1).$$
   Donc $f(P_1) = 3P_1$. De même, $P_2 = 3X^2 + 2X$ donc
$$\text{mat}_{\mathscr{C}}(f(P_2)) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -6 & 9 & -4 \\ -6 & 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} = 3\text{mat}_{\mathscr{C}}(P_2).$$

Donc $f(P_2) = 3P_2$. Enfin, pour $P_3 = 2X^2 + 2X + 1$, on a

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f(P_3)) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -6 & 9 & -4 \\ -6 & 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(P_3).$$

Donc $f(P_3) = 2P_3$. Conclusion,

$$\boxed{f(\mathscr{B}) = (3P_1, 3P_2, 2P_3).}$$

(c) Par la question précédente, les coordonnées de $f(P_1) = 3P_1$ dans la base $\mathscr{B}$ sont $(3, 0, 0)$. De même pour les autres polynômes. On a donc directement :

$$\boxed{D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

3. *Méthode 2.*

(a) On a directement,

$$\boxed{P = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.}$$

En louchant sur la question suivante, on se rend compte qu'il nous faudra $P-1$. Appliquons donc le pivot de Gauss :

$$\begin{aligned}
P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} &\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} && L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\
&\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} && L_2 \leftarrow -(L_2 - L_3) \\
&\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} && L_3 \leftarrow -(L_3 - 3L_2) \\
&\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} && \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}.
\end{aligned}$$

Donc $P \underset{\mathscr{L}}{\sim} I_3$. Donc

$$\boxed{P \text{ est inversible et donc on en déduit que } \mathscr{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$$

(b) On cherche $P_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) = P_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$. Or $P_{\mathscr{B},\mathscr{C}} = P^{-1}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}$. Calculons $P^{-1}$. En appliquant les opérations élémentaires de la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
I_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} &\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} && L_2 \leftarrow L_2 - L_1\\
&\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix} && L_2 \leftarrow -\left(L_2 - L_3\right)\\
&\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&1\\3&-3&2\end{pmatrix} && L_3 \leftarrow -\left(L_3 - 3L_2\right)\\
&\underset{\mathscr{L}}{\sim} \begin{pmatrix}-2&3&-2\\-2&2&-1\\3&-3&2\end{pmatrix} && \begin{matrix}L_1 \leftarrow L_1 - L_3\\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3\end{matrix}.
\end{aligned}$$

*On vérifie son résultat :*

$$PP^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&2\\0&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3&-2\\-2&2&-1\\3&-3&2\end{pmatrix} = I_3 \quad \text{OK !}$$

Conclusion,

$$\boxed{P_{\mathscr{B}}\left(\mathscr{C}\right) = P^{-1} = \begin{pmatrix}-2&3&-2\\-2&2&-1\\3&-3&2\end{pmatrix}.}$$

(c) Par la formule de changement de base bien connue, on a $D = P^{-1}AP$. On obtient donc que

$$\begin{aligned}
D = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\left(f\right) = P^{-1}\begin{pmatrix}0&3&-2\\-6&9&-4\\-6&6&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&2\\0&3&2\end{pmatrix}
&= \begin{pmatrix}-2&3&-2\\-2&2&-1\\3&-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0&2\\3&6&4\\0&9&4\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On retrouve bien que

$$\boxed{D = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}\left(f\right) = \begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}.}$$