Soit $x \in \mathbb{R}$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n x^n$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} k x^k = \sum_{k=0}^{n} u_k$

• si $x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

alors $x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$

pas tout à fait si $x<-2$ (x^n) ne diverge ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$.

ainsi $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge grossièrement OK et donc diverge. oui

• si $x = 1$ ou $x = -1$

alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^n = \pm 1$ bof mais ok

donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$ OK

ainsi, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge grossièrement et donc diverge. V

• $x \in]-1;1[$

alors $|x^n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ V et $n^2|u_n| = n^3|x^n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissance comparée oui

donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$, $n^3|x^n| < 1$ V $\iff |u_n| < \frac{1}{n^2}$ OK

de plus, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha > 1$ V, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \geq 0$ oui!

donc par le théorème de comparaison, $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ converge V

i.e. $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument

or la convergence absolue implique la convergence, V

donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. V Bien.

Calcul somme totale : $\hat{k} = k+1$ V

$\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} k x^k = \sum_{\hat{k}=1}^{n+1} (\hat{k}-1) x^{\hat{k}-1} = \frac{1}{x}\Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} k x^k}_{= S_n + u_{n+1} \text{ car } u_0 = 0} - \sum_{k=1}^{n+1} x^k\Big)$ V V OK

donc $S_n\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(-\sum_{k=1}^{n+1} x^k + u_{n+1}\right)$ V on reconnait une somme géométrique V

$S_n\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(-x\frac{1-x^{n+1}}{1-x} + (n+1)x^{n+1}\right)$ Bien.

$\Rightarrow \cancel{S_n = -x^2 \frac{1-x^n}{(1-x)(x-1)} + x^2 \frac{1-x^\infty}{(1-x)^2}}$

car $x \neq 1$

$\Rightarrow S_n = \frac{1}{x-1}\left((n+1)x^{n+1} - x\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)$

---

de plus, $(n+1)x^{n+1} \to 0$ car $x \in]-1;1[$ V et par croissance comparée V

donc :

$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{x-1}\left(-x\frac{1}{1-x}\right)$ V $= \frac{x}{(1-x)^2}$ oui Bien.