Correction Printemps 03
Série numérique

Solution de l'exercice 1

1. *Premier cas.* Soit $x \in [0;1[$ alors par croissance comparée $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3x^n = 0$ i.e. $nx^n \underset{n\to+\infty}{\ll} \frac{1}{n^2}$. Par conséquent, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que pour tout $n \geqslant n_0$,
$$0 \leqslant nx^n \leqslant \frac{1}{n^2}.$$
Or $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que dans ce cas, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} nx^n$ converge.
Deuxième cas. Soit $x \in [1;+\infty[$, alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} nx^n = +\infty$ (y compris si $x = 1$). Par conséquent la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} nx^n$ diverge grossièrement et donc diverge.
Troisième cas. Soit $x \in]-1;0[$. Alors $|x| \in [0;1[$. Donc par le premier cas,
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |nx^n| = \sum_{n\in\mathbb{N}} n\,|x|^n \text{ converge.}$$
Autrement dit, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} nx^n$ converge absolument. Or la convergence absolue implique la convergence. Dans ce cas, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} nx^n$ converge.
Quatrième cas. Soit $x \in]-\infty;-1]$. Posons $y = x^2$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $2px^{2p} = 2py^p$. Puisque $y = x^2 \in [1;+\infty[$, comme vu dans le deuxième cas, $(2px^{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ diverge. Or cette suite est une sous-suite de $(nx^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Donc $(nx^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Ainsi, dans ce cas, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} nx^n$ diverge grossièrement et donc diverge.
Conclusion. On a
$$\boxed{\begin{cases} \text{Si } x \in]-1;1[\text{ alors } \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} nx^n \text{ converge.} \\ \text{Si } x \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[\text{ alors } \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} nx^n \text{ diverge.} \end{cases}}$$

2. *La méthode est imposée, on procède par un glissement d'indice. Bien sûr, on aurait pu procéder comme dans le DM8 et calculer la dérivée d'une somme géométrique. On y avait tous pensé.*
Soit $x \in]-1;1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} kx^k$. Par le changement d'indice $\tilde{k} = k - 1$, on a,

pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n} kx^k &= 0 + \sum_{k=1}^{n} kx^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\, x^{k+1} \\ &= x \sum_{k=0}^{n-1} kx^k + x \sum_{k=0}^{n-1} x^k \\ &= x \sum_{k=0}^{n} kx^k - xnx^n + x \sum_{k=0}^{n-1} x^k \\ &= xS_n - nx^{n+1} + x \sum_{k=0}^{n-1} x^k. \end{aligned}$$

Or $\sum_{k=0}^{n-1} x^k$ est une somme géométrique de raison $x\,]-1;1[$, donc la série associée $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ converge et sa somme totale vaut $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$. De plus, $\lim_{n\to+\infty} nx^{n+1} = 0$ par croissance comparée car $x \in\,]-1;1[$ et par la question 1, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. En notant S sa somme totale, on obtient par passage à la limite :

$$S = xS - 0 + \frac{x}{1-x} \qquad \Leftrightarrow \qquad (1-x)\, S = \frac{x}{1-x}.$$

Or $x \neq 1$. Conclusion,

$$\boxed{S = \sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}.}$$