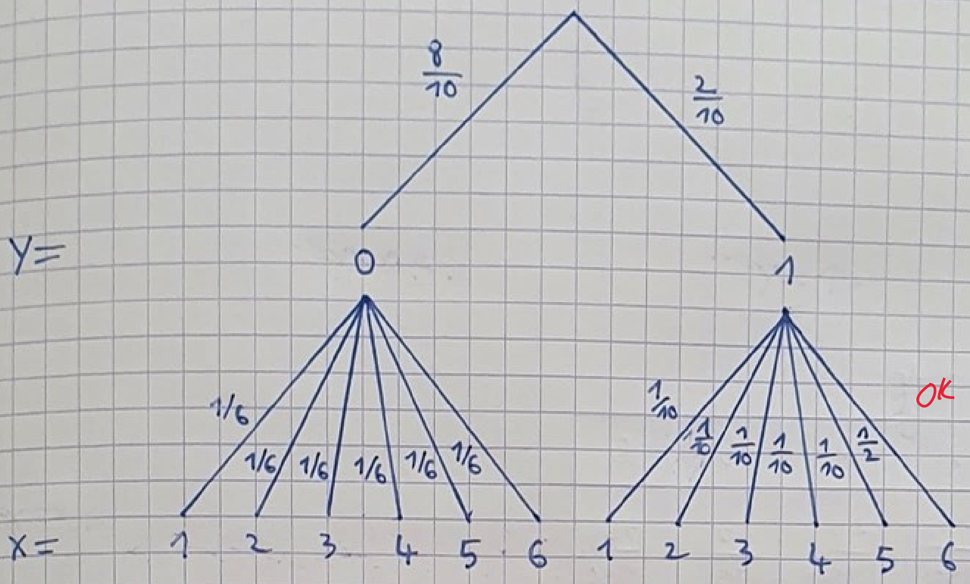
Exercice Printemps 04 – Probabilités

On obtient le tableau de probabilités suivant en fonction des données de l'énoncé :



1. On considère l'événement $Y=1$ comme le succès et $Y=0$ comme l'échec. Il s'agit donc d'une expérience à deux issues dont la probabilité d'obtenir le succès vaut $\frac{2}{10}$. Y suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{2}{10}$ = ...

$$\boxed{Y \sim \mathcal{B}\left(\frac{2}{10}\right)}$$

2. L'événement $Y=0$ est réalisé, on obtient donc un dé équilibré à six faces. La probabilité d'obtenir chacune des faces vaut $\frac{1}{6}$. Ainsi, la loi conditionnelle de X sachant $Y=0$ est une loi uniforme de paramètre $\frac{1}{6}$: aïe !

$$\boxed{X_{|Y=0} \sim \mathcal{U}([\![1;6]\!])}$$

3. L'événement $Y=1$ est réalisé, on obtient donc un dé truqué à six faces où la probabilité d'obtenir 6 vaut $\frac{1}{2}$. La probabilité d'obtenir les autres faces est égale pour chacune des faces. On obtient ainsi la loi de probabilités suivante :

à démontrer !

$X=$	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$

4. Pour tout k de $[\![1;6]\!]$, calculons $P(X=k)$.

aïe !

Les événements $Y=0$ et $Y=1$ forment un système complet d'événements incompatibles. Ainsi, par la formule des probabilités totales, il vient :

d'après...

$$P(X=1) = P(Y=0)\,P(X=1 \mid Y=0) + P(Y=1)\,P(X=1 \mid Y=1) = \frac{8}{10}\frac{1}{6} + \frac{2}{10}\frac{1}{10} = \frac{23}{150}$$

De même :

$\mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(Y=0)\,\mathbb{P}(X=2|Y=0) + \mathbb{P}(Y=1)\,\mathbb{P}(X=2|Y=1) = \frac{8}{10}\frac{1}{6} + \frac{2}{10}\frac{1}{10} = \frac{23}{150}$

On montre ainsi de la même façon que :

$\mathbb{P}(X=3) = \frac{23}{150}$

$\mathbb{P}(X=4) = \frac{23}{150}$

$\mathbb{P}(X=5) = \frac{23}{150}$

$\mathbb{P}(X=6) = \frac{35}{150}$

On obtient la loi de X suivante :

$X=$	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{23}{150}$	$\frac{23}{150}$	$\frac{23}{150}$	$\frac{23}{150}$	$\frac{23}{150}$	$\frac{35}{150}$

Oui

On remarque que la somme des probabilités vaut 1, ce qui est cohérent. ✓

5. On cherche $\mathbb{P}(Y=1|X=2)$.

Par la formule de Bayes car $\mathbb{P}(X=2) \neq 0$ dit ! il vient :

$$\mathbb{P}(Y=1|X=2) = \frac{\mathbb{P}(X=2|Y=1)\,\mathbb{P}(Y=1)}{\mathbb{P}(X=2)} \checkmark$$

$$= \frac{\frac{1}{10}\ \frac{2}{10}}{\frac{23}{150}}$$ d'après ??

$\mathbb{P}(Y=1|X=2) = \frac{3}{23}$ Oui

La probabilité d'avoir pioché un dé truqué sachant que l'on a obtenu la face 2 vaut :

$$\boxed{\mathbb{P}(Y=1|X=2) = \frac{3}{23}}$$

TB !