Correction Printemps 04
Probabilités

Solution de l'exercice 1

1. On note que Y n'a que deux issues : $Y(\Omega) = \{0; 1\}$. Donc Y est une loi de Bernoulli. Déterminons son paramètre i.e. $\mathbb{P}(Y = 1)$. On possède deux dés truqués sur les dix et on en pioche un de façon uniforme. Donc
$$\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$
Conclusion,
$$\boxed{Y \sim \mathscr{B}\left(\frac{1}{5}\right).}$$

2. On suppose l'évènement $(Y = 0)$ réalisé i.e. on a pioché un dé équilibré. Alors, directement X retourne chaque face de façon équilibrée :
$$\boxed{\text{La loi conditionnelle de } X \text{ sachant } (Y = 0) \text{ est une loi uniforme sur } [\![1; 6]\!] : \mathscr{U}([\![1; 6]\!]).}$$

3. On suppose l'évènement $(Y = 1)$ réalisé i.e. on a pioché un dé truqué. On sait par définition que dans ce cas,
$$\mathbb{P}(X = 6 \mid Y = 1) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \exists p \in [0; 1], \forall k \in [\![1; 5]\!], \qquad \mathbb{P}(X = k \mid Y = 1) = p.$$
Puisque $(X = k)_{k \in [\![1;6]\!]}$ forme un système complet d'évènements, on a
$$1 = \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(X = k \mid Y = 1) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{5} p = \frac{1}{2} + 5p.$$
Ainsi, $5p = 1/2$ i.e. $p = \frac{1}{10}$. Conclusion, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = 1)$ est donnée par
$$\boxed{\mathbb{P}(X = 6 \mid Y = 1) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![1; 5]\!], \qquad \mathbb{P}(X = k \mid Y = 1) = \frac{1}{10}.}$$

4. *Premier cas, $k = 6$.* La famille $((Y = 0), (Y = 1))$ forme un système complet d'évènements donc par la formule des probabilités totales :
$$\mathbb{P}(X = 6) = \mathbb{P}(X = 6 \mid Y = 1)\mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(X = 6 \mid Y = 0)\mathbb{P}(Y = 0).$$
Or par la question 1, $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{5}$ et donc $\mathbb{P}(Y = 0) = 1 - \mathbb{P}(Y = 1) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$. De plus, par la question 2, $\mathbb{P}(X = 6 \mid Y = 0) = \frac{1}{6}$ et enfin par la question 3, $\mathbb{P}(X = 6 \mid Y = 1) = \frac{1}{2}$. Dès lors,
$$\mathbb{P}(X = 6) = \frac{1}{2}\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\frac{4}{5} = \frac{3 + 4}{30} = \frac{7}{30}.$$
Second cas, $k \in [\![1; 5]\!]$. Alors, de même
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}(X = k \mid Y = 1)\mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(X = k \mid Y = 0)\mathbb{P}(Y = 0)\\ &= \frac{1}{10}\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\frac{4}{5} = \frac{3 + 20}{150} = \frac{23}{150}.\end{aligned}$$
Conclusion, la loi de X est donnée par
$$\boxed{X(\Omega) = [\![1; 6]\!], \qquad \mathbb{P}(X = 6) = \frac{7}{30} \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![1; 5]\!], \mathbb{P}(X = k) = \frac{23}{150}.}$$

5. On cherche $\mathbb{P}\left(Y=1 \mid X=2\right)$. Par la question précédente, on note que $\mathbb{P}\left(X=2\right)=\frac{23}{150}\neq 0$. Donc par la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}\left(Y=1 \mid X=2\right)=\frac{\mathbb{P}\left(X=2 \mid Y=1\right)\mathbb{P}\left(Y=1\right)}{\mathbb{P}\left(X=2\right)}.$$

Or par la question 3, $\mathbb{P}\left(X=2 \mid Y=1\right)=\frac{1}{10}$. Par la question 1, $\mathbb{P}\left(Y=1\right)=\frac{1}{5}$ et par la question 4, $\mathbb{P}\left(X=2\right)=\frac{23}{150}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}\left(Y=1 \mid X=2\right)=\frac{\frac{1}{10}\frac{1}{5}}{\frac{23}{150}}=\frac{1}{\frac{23}{3}}=\frac{3}{23}.$$

Conclusion,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(Y=1 \mid X=2\right)=\frac{3}{23}.}$$