Exercice Printemps 05
Représentation matricielle

Exercice 1 Soit

$$f:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X]\\ P & \mapsto & P(1)X^2+XP'+P'(2).\end{array}$$

On note $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On admet que $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$.
Je peux taper la correction de cette assertion si certains le demandent.

1. Calculer $A=\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(f)$.
2. On pose $A_1=A-I_3$ et f_1 l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ canoniquement associée à A_1.
   (a) Préciser f_1.
   (b) Calculer $\mathrm{Im}(A_1)$ et en déduire $\mathrm{Im}(f_1)$.
   On pourra directement utiliser que l'image d'une matrice est l'espace vectoriel engendré par ses vecteurs colonnes.
   (c) Calculer $\mathrm{Ker}(A_1)$ et en déduire $\mathrm{Ker}(f_1)$.
   (d) L'application f_1 est-elle injective ? surjective ? bijective ?
3. Calculer $\mathrm{Ker}(A+I_3)$ et en déduire $\mathrm{Ker}\left(f+\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]}\right)$.

La suite lundi ! !