Exercice de Révision 05

Antoine ENSELME

1°) On a $f(1) = X^2$, $f(X) = X^2 + X + 1$, $f(X^2) = X^2 + 2X^2 + 4$ $= \dots$

donc $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ oui !

2°) a) On a $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (donc) et $f_1 : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X],\ P \to P(1)X^2 + XP' + P'(2) - P$ ok

b) On sait que $\mathrm{Im}(A_1)$ est l'espace vectoriel engendré par ses vecteurs colonnes.

Donc $\mathrm{Im}(A_1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ Or les opérations élémentaires ne modifient pas le caractère libre et générateur

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \underset{C}{\sim} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \begin{matrix} C_1 \leftarrow C_1 + C_2 \\ C_3 \leftarrow C_3 - 2C_2 \end{matrix}$$

$$\underset{C}{\sim} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \begin{matrix} C_1 \leftarrow \frac{1}{2} C_1 \\ C_3 \leftarrow \frac{1}{2} C_3 \end{matrix} \underset{C}{\sim} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ car } C_2 = C_1 + C_2$$ oui.

Donc $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base $\mathrm{Im}(A_1)$ donc $\mathrm{Im}(A_1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ on peut directement en déduire que $\mathrm{Im}(f_1) = \mathrm{Vect}(X^2, 1)$ Bien.

c) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ ~~tel que~~ $A_1 X = 0_{\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})}$

$\iff X \in \mathrm{Ker}(A_1)$ ~~donc~~ $A_1 X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

On en déduit le système homogène suivant

Non. A reprendre.

$$\cancel{\begin{cases} -x+z=0 \\ x+z=0 \\ 4x+2z=0 \end{cases}} \Rightarrow \begin{cases} x=z \\ x=-z \\ 2x=-z \end{cases} \Rightarrow x=z=0$$

Donc $X=\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $Ker(A_1) = Vect\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ on en déduit que $Ker(f_1) = Vect(X)$ Cohérent.

d) On a $\dim(Ker(f_1)) \neq 0$ et $Im(f_1) \neq \mathbb{R}_2[X]$ car...
donc f_1 n'est ni surjective ni injective par conséquent ni même bijective OK

3°) On a $A+I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ Soit $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

~~tel que~~ $X \in Ker(A+I_3)$ i.e

$$\Leftrightarrow \cancel{\begin{cases} x=-z \\ x+2y+z=0 \\ x+y+4z=0 \end{cases}} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ 2y=0 \\ 3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=0$$

Donc $Ker(A+I_3) = \{0\}$ on en déduit que

$Ker(f+Id_{\mathbb{R}_2[X]}) = \{0\}$